

# COMPÊNDIO DO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

FELIX HORACIO MUNOZ MUNIZ JUNIOR



# COMPÊNDIO DO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL



Todo o conteúdo apresentado neste livro é de  
responsabilidade do(s) autor(es).  
Esta obra está licenciada com uma Licença  
Creative Commons Atribuição-SemDerivações  
4.0 Internacional.

## Conselho Editorial

Prof. Dr. Ednilson Sergio Ramalho de Souza - UFOPA  
(Editor-Chefe)  
Prof. Dr. Laecio Nobre de Macedo-UFMA  
Prof. Dr. Aldrin Vianna de Santana-UNIFAP  
Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Raquel Silvano Almeida-Unespar  
Prof. Dr. Carlos Erick Brito de Sousa-UFMA  
Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Ilka Kassandra Pereira Belfort-Faculdade Laboro  
Prof<sup>a</sup>. Dr. Renata Cristina Lopes Andrade-FURG  
Prof. Dr. Elias Rocha Gonçalves-IFF  
Prof. Dr. Clézio dos Santos-UFRRJ  
Prof. Dr. Rodrigo Luiz Fabri-UFJF  
Prof. Dr. Manoel dos Santos Costa-IEMA  
Prof.<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup>. Isabella Macário Ferro Cavalcanti-UFPE  
Prof. Dr. Rodolfo Maduro Almeida-UFOPA  
Prof. Dr. Deivid Alex dos Santos-UEL  
Prof.<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup>. Maria de Fatima Vilhena da Silva-UFPA  
Prof.<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup>. Dayse Marinho Martins-IEMA  
Prof. Dr. Daniel Tarciso Martins Pereira-UFAM  
Prof.<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup>. Elane da Silva Barbosa-UERN  
Prof. Dr. Piter Anderson Severino de Jesus-Université Aix Marseille

Nossa missão é a difusão do conhecimento gerado no âmbito acadêmico por meio da organização e da publicação de livros científicos de fácil acesso, de baixo custo financeiro e de alta qualidade!

Nossa inspiração é acreditar que a ampla divulgação do conhecimento científico pode mudar para melhor o mundo em que vivemos!

*Equipe RFB Editora*

Felix Horacio Munoz Muniz Junior

# COMPÊNDIO DO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

1ª Edição

Belém-PA  
RFB Editora  
2023

© 2023 Edição brasileira  
by RFB Editora  
© 2023 Texto  
by Autor  
Todos os direitos reservados

RFB Editora  
CNPJ: 39.242.488/0001-07  
www.rfbeditora.com  
adm@rfbeditora.com  
91 98885-7730

Av. Governador José Malcher, nº 153, Sala 12, Nazaré, Belém-PA,  
CEP 66035065

**Editor-Chefe**

Prof. Dr. Ednilson Souza

**Diagramação**

Worges Editoração

**Revisão de texto e capa**

Autor

**Bibliotecária**

Janaina Karina Alves Trigo Ramos

**Produtor editorial**

Nazareno Da Luz

**Catálogo na publicação**

Elaborada por **Bibliotecária Janaina Ramos – CRB-8/9166**

M966p

Muniz Junior, Felix Horacio Munoz

Compêndio do cálculo diferencial e integral / Felix Horacio Munoz Muniz Junior. –  
Belém: RFB, 2023.

52 p.; 16 X 23 cm

ISBN 978-65-5889-537-4

DOI 10.46898/rfb.15f684ab-9ac4-4ae6-b50f-2da513585f68

1. Matemática. I. Muniz Junior, Felix Horacio Munoz. II. Título.

CDD 510.07

Índice para catálogo sistemático

I. Matemática

# SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO .....	7
CAPÍTULO I UMA BREVE HISTÓRIA DO CÁLCULO .....	9
CAPÍTULO II LIMITES .....	13
CAPÍTULO III DERIVADAS .....	25
CAPÍTULO IV INTEGRAIS .....	37
REFERÊNCIAS .....	49
ÍNDICE REMISSIVO .....	50
SOBRE O AUTOR .....	51



# APRESENTAÇÃO

O Cálculo Diferencial e Integral é uma das disciplinas mais importantes da matemática. Atualmente, no Brasil, ela faz parte do currículo básico dos cursos de graduação da área de exatas. Trata-se de uma importante ferramenta para compreender os fenômenos do mundo ao nosso redor. Desde a previsão do movimento dos planetas até o desenvolvimento de tecnologias avançadas, o cálculo permeia diversas áreas do conhecimento como a física, química, engenharia, economia, estatística, psicologia e sociologia.

O cálculo diferencial concentra-se no estudo das taxas de variação e das propriedades das funções. Através do conceito de derivada, podemos entender como uma função muda em relação à variação de suas variáveis. A derivada representa a taxa instantânea de mudança de uma função em um ponto específico, permitindo-nos calcular inclinações de retas tangentes, velocidades instantâneas e taxas de crescimento. Essa abordagem dinâmica do cálculo diferencial nos permite modelar e compreender fenômenos em constante transformação. Desde a descrição do movimento de corpos celestes até a análise do crescimento populacional, a derivada desempenha um papel central na formulação de leis físicas, econométricas e biológicas. Ela é essencial para prever e entender padrões de mudança e tomada de decisões em diversos campos do conhecimento.

Já o cálculo integral é o ramo do cálculo que lida com o problema de áreas de regiões curvilíneas. Esse aspecto geométrico nos permite estudar o acúmulo de quantidades variáveis ao longo de intervalos. Enquanto a derivada mede as taxas de variação instantânea, a integral nos permite determinar a soma total de variações ao longo de um intervalo.

Este trabalho não tem como objetivo a substituição do estudo dos tradicionais textos de Cálculo utilizados como livro texto nas universidades brasileiras. Trata-se de um compêndio sobre o cálculo diferencial e integral, abordando de maneira direta e resumida os principais tópicos dessa disciplina, sem uma preocupação com demonstrações e rigor excessivo. Tem como objetivo ser um guia rápido e de fácil acesso para discentes dessa disciplina, bem como para entusiastas do assunto, que necessitem de uma compilação dos elementos fundamentais dessa teoria.

# CAPÍTULO I

## UMA BREVE HISTÓRIA DO CÁLCULO

## 1 NOTAS HISTÓRICAS

O Cálculo tem suas origens na Grécia antiga quando, há pelo menos 2500 anos atrás, problemas como o cálculo de áreas de figuras curvas e volumes de sólidos delimitados por superfícies curvas já desafiavam os filósofos da época.

No século V a.C., Eudoxo usou o chamado método da exaustão para provar a fórmula da área do círculo. Esse método deu origem ao que, hoje, chamamos de limites, conceito fundamental para o estudo do cálculo. O ramo do cálculo que trata dos problemas de áreas e volumes é chamado de Cálculo Integral.

O outro ramo do cálculo trata de problemas relacionados a retas tangentes a curvas, e denomina-se Cálculo Diferencial. Os problemas de tangentes também apareceram na Grécia antiga, porém com objetivos puramente geométricos, e por isso não se desenvolveram significativamente durante alguns séculos. O interesse em tangentes a curvas reapareceu no século XVII como uma parte do desenvolvimento da geometria analítica.

Durante toda a história, muitos matemáticos fizeram contribuições importantes no desenvolvimento do cálculo. Mas o ápice ocorreu no século XVII, quando, de forma independente, Isaac Newton e Wilhelm Leibniz, organizaram as ideias já descobertas até então, aprimoraram a linguagem matemática, desenvolveram as ideias de limites e descobriram a peça chave para o grande quebra cabeça: O Teorema Fundamental do Cálculo, que estabelece o Cálculo Diferencial e o Cálculo Integral, aparentemente independentes, como processos inversos.

Isaac Newton, conhecido por suas contribuições para a física e a matemática, publicou seu trabalho principal, “*Philosophiæ Naturalis*

Principia Mathematica”, em 1687. Nessa obra monumental, Newton formulou as leis do movimento e a lei da gravitação universal. Para resolver os desafios matemáticos envolvidos em suas teorias, Newton desenvolveu o cálculo diferencial, introduzindo o conceito de derivada e suas aplicações na análise do movimento e das taxas de variação.

Enquanto isso, Gottfried Wilhelm Leibniz, um filósofo, matemático e cientista alemão, estava desenvolvendo de forma independente suas próprias ideias sobre o cálculo. Leibniz introduziu o conceito de notação diferencial, com o uso de símbolos como o  $\frac{dy}{dx}$  para representar as taxas de variação. Em 1684 Leibniz publicou sua versão do cálculo, sob suspeitas de plágio das ideias de Newton. Nesse trabalho procurou desenvolver um sistema de notações que simplificariam o raciocínio lógico. Sua simbologia e as regras para encontrar as derivadas e integrais, são usadas até hoje. A teoria mais aceita hoje é de que não houve plágio por parte de Leibniz, e aos dois matemáticos são dados os maiores créditos sobre a invenção do Cálculo.

Após Newton e Leibniz, o cálculo diferencial e integral continuou a se desenvolver e a evoluir. Durante o século XVIII, os matemáticos franceses Augustin-Louis Cauchy e Joseph-Louis Lagrange aprofundaram as bases do cálculo, estabelecendo os conceitos rigorosos de limite, continuidade e convergência.

No século XIX, os trabalhos de Carl Friedrich Gauss, Bernhard Riemann e Henri Poincaré trouxeram novas perspectivas para o cálculo diferencial e integral. Gauss contribuiu para o campo com suas técnicas de integração e sua pesquisa em superfícies curvas. Riemann, por sua vez, introduziu a integral definida e expandiu a teoria do cálculo para funções de múltiplas variáveis. Poincaré avançou o campo ao investigar sistemas dinâmicos e suas soluções diferenciais.

No século XX, o cálculo diferencial e integral continuou a se desenvolver e encontrar aplicações em diversos campos, como física, engenharia, economia, biologia e ciência da computação. Contribuições significativas foram feitas por matemáticos como Karl Weierstrass, Émile Borel, Henri Lebesgue, entre outros, que refinaram conceitos e provaram teoremas fundamentais.

Com o advento da computação e do avanço tecnológico, o cálculo diferencial e integral encontrou novas aplicações e possibilidades. Métodos numéricos, integração computacional e simulação são agora ferramentas essenciais em muitas áreas científicas e de engenharia.

Hoje, o cálculo diferencial e integral é uma disciplina essencial no currículo de matemática e ciências. Seus conceitos e técnicas continuam a ser estudados e aprimorados, e o cálculo continua a ser uma área de pesquisa ativa em matemática pura e aplicada.

Ao refletirmos sobre a história do cálculo diferencial e integral, reconhecemos as mentes brilhantes e as contribuições revolucionárias que moldaram essa disciplina. Graças a Newton, Leibniz e a tantos outros matemáticos notáveis, hoje temos uma ferramenta poderosa para entender, descrever e modelar a mudança e a acumulação de grandezas, permitindo-nos explorar e compreender o mundo com uma nova perspectiva matemática.

# CAPÍTULO II

## LIMITES

## 2 LIMITES

O conceito de limites é um dos pilares fundamentais do cálculo diferencial e integral. Ele surge quando estamos buscando encontrar inclinações de retas tangentes à curvas, no cálculo de velocidades instantâneas, nas taxas de variações entre grandezas, no cálculo de áreas de regiões curvilíneas e no cômputo de somas de infinitas parcelas. De modo geral, quando estamos resolvendo cada um desses problemas, construímos uma função matemática que represente a situação e investigamos o comportamento dessa função em pontos específicos e/ou analisamos as tendências da função. Isso é feito através do conceito de limites.

### 2.1 Limite de uma função

Considere a função  $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$  definida para todo  $x$  real,  $x \neq 1$ . A função não está definida em  $x = 1$ , no entanto podemos investigar o comportamento da função  $f$  para valores de  $x$  próximos de 1, menores e maiores, mas não iguais a 1. Observe as tabelas:

$x$	0	0,5	0,8	0,9	0,995	0,999
$f(x)$	1	1,5	1,8	1,9	1,995	1,999

$x$	2	1,5	1,2	1,1	1,005	1,001
$f(x)$	3	2,5	2,2	2,1	2,005	2,001

Avaliando os valores calculados para a função, temos que à medida que os valores atribuídos a  $x$  se aproximam de 1, os valores de  $f(x)$  se aproximam de 2. É bastante intuitivo que podemos conseguir valores de  $f(x)$  tão próximos de 2 quanto se queira, bastando para isso tomar valores de  $x$  suficientemente próximos de 1. Matematicamente expressamos esse fato assim:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2 \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

e dizemos “o limite de  $f(x)$ , quando  $x$  tende a 1, é igual a 2”.

Alternativamente podemos escrever que  $f(x) \rightarrow 2$ , quando  $x \rightarrow 1$  ( $f(x)$  tende a 2, quando  $x$  tende a 1).

De fato, podemos fatorar a expressão de  $f$  e obter:  $f(x) = \frac{(x+1)(x-1)}{x-1}$ . Se  $x \neq 1$  podemos cancelar o fator  $x - 1$  e então teremos  $f(x) = x + 1$ . O gráfico da função  $f$  está exibido na figura 1.

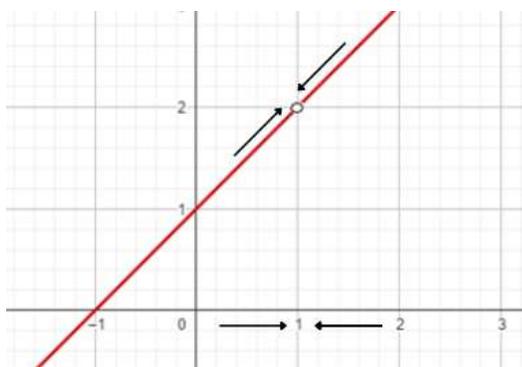


Figura 1- Gráfico da função  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ .

Observando o gráfico de  $f$  fica claro que os seus valores se aproximam de 2 quando  $x$  se aproxima de 1.

Na seção 1.1.1 apresentamos uma definição para o limite de uma função.

### 2.1.1 Definição do limite de uma função

Considere uma função  $f$  definida em algum intervalo aberto contendo o número  $a$  (exceto, possivelmente, o próprio  $a$ ). Dizemos que o limite de  $f(x)$  quando  $x$  tende a  $a$  vale  $L$ , se pudermos tornar os valores de  $f(x)$  arbitrariamente próximos à  $L$ , tomando valores de

$x$  suficientemente próximos de  $a$ , menores e maiores que  $a$ , mas não iguais a  $a$ . Se isso ocorre, representaremos esse fato escrevendo:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L.$$

Observe que, na definição do limite de  $f(x)$  quando  $x$  tende a  $a$ , não consideramos o valor da função em  $x = a$ . Na realidade  $f(x)$  não precisa sequer estar definida em  $x = a$ , ou até mesmo poderia estar definida num valor diferente de  $L$ , importando, apenas, como  $f(x)$  se comporta próximo de  $a$ . A figura 2 ilustra três casos em que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ .

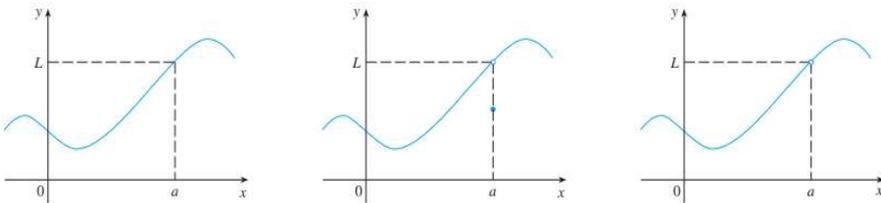


Figura 2- Três casos em que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$

## 2.2 Limites laterais

Considere a função  $f(x) = \frac{|x-1|}{x-1}$ , definida para todo  $x$  real,  $x \neq 1$ . O gráfico de  $f(x)$  é apresentado na figura 3.

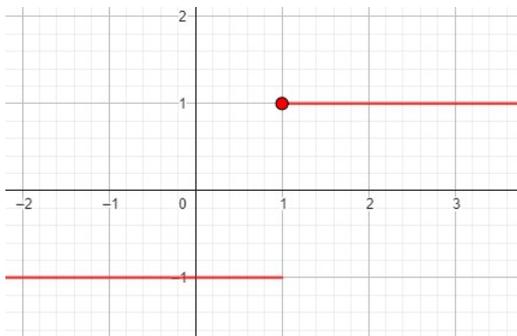


Figura 3- Gráfico da função  $f(x) = \frac{|x-1|}{x-1}$ .

Vamos analisar o que ocorre com  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ .

Quando  $x$  tende a  $1$ , por valores maiores que  $1$  (ou pela direita de  $1$ ), a função se aproxima de  $1$ . Representaremos esse fato escrevendo:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$$

e dizemos que o limite lateral direito de  $f$ , quando  $x$  tende a  $1$ , vale  $1$ .

No entanto, quando  $x$  tende a  $1$ , por valores menores que  $1$  (ou pela esquerda de  $1$ , a função se aproxima de  $-1$ . Representaremos esse fato escrevendo:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -1$$

e dizemos que o limite lateral esquerdo de  $f$ , quando  $x$  tende a  $1$ , vale  $-1$ .

Observação: O sinal de positivo e negativo a direita do um, nos limites, não se trata de valores positivos ou negativos, mas sim de valores maiores e menores que  $1$  respectivamente.

Como os limites laterais, em torno de  $x = 1$ , deram resultados distintos, dizemos que  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  não existe. Dessa forma condicionamos a existência de um limite, a existência dos limites laterais, e que estes tenham o mesmo valor.

## 2.3 Limites infinitos

Considere a função  $f(x) = \frac{1}{x^2}$ , definida para todo  $x$  real,  $x \neq 0$ . O gráfico de  $f$  é apresentado na figura 4.

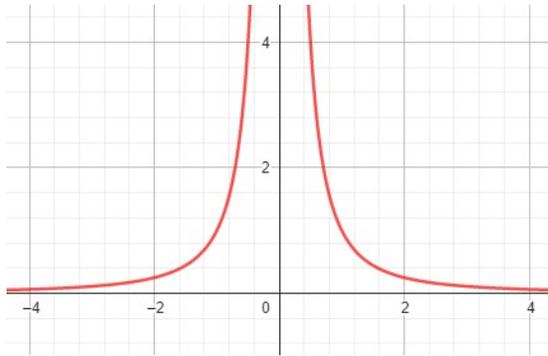


Figura 4- Gráfico da função  $f(x) = \frac{1}{x^2}$

Vamos analisar o que ocorre com  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .

Observe que à medida que  $x$  se aproxima de zero, tanto por valores superiores como por valores inferiores a zero, a função não tende a um número específico, mas sim cresce indefinidamente. Representaremos esse fato escrevendo:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty.$$

Neste caso, apesar da notação utilizada, consideramos que não existe o limite da função  $f$  quando  $x$  tende a zero (já que o infinito não representa um número, mas sim que a função não para de crescer).

A reta  $x = 0$  é uma assíntota vertical da função. De modo mais geral, se para alguma função ocorrer algum dos limites  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$  ou  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$ , então a reta  $x = a$  é uma assíntota vertical da função.

Ainda considerando a função da figura 4, observamos que à medida que os valores de  $x$  aumentam em módulo, a função diminui seu valor e se aproxima de zero. Representaremos esse fato escrevendo:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \text{ e } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

A reta  $y = 0$  é uma assíntota horizontal da função. De modo mais geral, se para alguma função ocorrer algum dos limites

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$  ou  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ , então a reta  $y = L$  é uma assíntota horizontal da função.

## 2.4 Continuidade

Intuitivamente, dizemos que uma função é contínua quando conseguimos esboçar o seu gráfico sem retirar o lápis do papel, isto é, o gráfico da função não apresenta furos ou saltos. Essa definição é vaga, uma definição mais formal é apresentada a seguir.

Dizemos que uma função é contínua em  $x = a$  se  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .

Está implícito nessa definição três condições para a continuidade no ponto  $x = a$ :

1.  $a$  está no domínio de  $f$ .
2. Existe  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ .
3.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

Uma função será dita contínua em um intervalo aberto  $I$ , se for contínua em todos os pontos de  $I$ .

## 2.5 Propriedades dos limites

Para o cálculo de limites de funções, usaremos um conjunto de propriedades, também chamadas de *Leis dos Limites*.

Lei da Soma	$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
Lei da Diferença	$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
Lei do Múltiplo Constante	$\lim_{x \rightarrow a} [c \cdot f(x)] = c \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x)$
Lei do Produto	$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
Lei do Quociente	$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$ , se $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$
Lei da Potência	$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = [\lim_{x \rightarrow a} f(x)]^n$
Propriedade da Substituição Direta	<p>Seja <math>a \in \mathbb{R}</math>, tal que <math>a</math> está no domínio da função <math>f(x)</math>, então <math>\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)</math>, para os seguintes tipos de funções:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Polinomial</li> <li>• Racional</li> <li>• Raízes</li> <li>• Trigonométricas</li> <li>• Trigonométricas Inversas</li> <li>• Exponencial</li> <li>• Logarítmicas</li> </ul>
Teorema do Confronto (Teorema do Sanduíche)	<p>Se <math>f(x) \leq g(x) \leq h(x)</math> para valores de <math>x</math> próximos de <math>a</math> e <math>\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L</math></p> <p>então <math>\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L</math>.</p>

## 2.6 Definição do número $e$ como um limite

O número irracional  $e$ , cujo valor aproximado é 2,718, é um número fundamental para o Cálculo Diferencial e Integral. Em sessões posteriores sua relevância ficará explícita. Por hora, apresentamos uma definição desse número através de um limite:

$$e = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

## 2.7 Exemplos resolvidos

**Exemplo 1:** Calcule  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 - 3x + 3}}{2^x + 2}$ .

*Resolução:*

Como a função envolve apenas termos polinomiais, exponenciais e radicais e, além disso, a função está definida em  $x = 2$ , podemos usar a propriedade da substituição direta e obter:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 - 3x + 3}}{2^x + 2} = \frac{\sqrt{(2)^2 - 3(2) + 3}}{2^2 + 2} = \frac{1}{6}.$$

**Exemplo 2:** Calcule  $\lim_{t \rightarrow 4} \frac{4-t}{2-\sqrt{t}}$ .

*Resolução:*

Observe que aqui não podemos aplicar a propriedade da substituição direta, uma vez que a função não está definida em  $t = 4$ . No entanto, podemos fatorar a expressão e obter:

$$\lim_{t \rightarrow 4} \frac{4-t}{2-\sqrt{t}} = \lim_{t \rightarrow 4} \frac{(2+\sqrt{t})(2-\sqrt{t})}{2-\sqrt{t}} = \lim_{t \rightarrow 4} (2 + \sqrt{t}) = 2 + \sqrt{4} = 4$$

**Exemplo 3:** Calcule  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+h}-1}{h}$ .

*Resolução:*

Novamente não podemos aplicar o método da substituição direta, pois a função não está definida em  $h = 0$ . Aqui a estratégia utilizada, será a racionalização do numerador:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+h}-1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+h}-1}{h} \cdot \frac{\sqrt{1+h}+1}{\sqrt{1+h}+1} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h(\sqrt{1+h}+1)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1+h}+1} = \frac{1}{2}.$$

**Exemplo 4:** Calcule  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3+2x+1}{5x^3-4x^2-2}$ .

*Resolução:*

Observe que tanto o numerador quanto o denominador tendem ao infinito quando  $x \rightarrow +\infty$ . Logo, não é óbvio o que acontece quando  $x$  cresce indefinidamente. Nesse tipo de situação a estratégia é dividir numerador e denominador pela maior potência de  $x$  que aparece no denominador:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3+2x+1}{5x^3-4x^2-2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{3x^3+2x+1}{x^3}}{\frac{5x^3-4x^2-2}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3}}{5 - \frac{4}{x} - \frac{2}{x^3}}$$

O limite das parcelas da forma  $\frac{C}{x^n}$ , sendo  $C$  constante e  $n > 0$ , quando  $x \rightarrow +\infty$ , vale zero, pois como o denominador cresce indefinidamente e o numerador é constante,  $\frac{C}{x^n} \rightarrow 0$ . Logo o limite procurado fica

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3}}{5 - \frac{4}{x} - \frac{2}{x^3}} = \frac{3+0+0}{5-0-0} = \frac{3}{5}.$$

**Exemplo 5:** Determine o valor de  $a$ , para que a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}, & \text{se } x \neq 1. \\ a, & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

seja contínua, para todos os valores de  $x \in \mathbb{R}$ .

*Resolução:*

Para que a função  $f(x)$  seja contínua para todo  $x$  real,  $\lim_{x \rightarrow k} f(x) = f(k)$  para todo  $k \in \mathbb{R}$ . O possível ponto de descontinuidade é aquele que anula o denominador da expressão. Queremos então que  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = a$ . Temos que:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x + 2)(x - 1)}{(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 2) = 3$$

e, portanto, devemos ter  $a = 3$ .

**Exemplo 6:** Mostre que  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( x^2 \cdot \text{sen} \frac{1}{x} \right) = 0$ .

*Resolução:*

Sabemos que a função  $\text{sen} x$  é limitada pelos valores  $-1$  e  $1$ , então  $-1 \leq \text{sen} \frac{1}{x} \leq 1$ . Multiplicando a desigualdade por  $x^2$  temos:  $-x^2 \leq x^2 \text{sen} \frac{1}{x} \leq x^2$ . Como  $\lim_{x \rightarrow 0} -x^2 = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$ , pelo teorema do confronto, temos que  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( x^2 \cdot \text{sen} \frac{1}{x} \right) = 0$ .



# CAPÍTULO III

## DERIVADAS

## 3 CÁLCULO DIFERENCIAL

### 3.1 Derivadas

O problema central do cálculo diferencial consiste em determinar a inclinação da reta tangente  $t$ , a uma curva  $C$  de equação  $y = f(x)$ , no ponto  $P = (a, f(a))$ . A dificuldade surge no fato de que para computar a inclinação são necessários dois pontos da reta e, no entanto, temos conhecimento apenas do ponto  $P$ .

Para contornar esse problema, tomamos um ponto vizinho  $Q = (x, f(x))$  com  $x \neq a$ , conforme a figura 5.

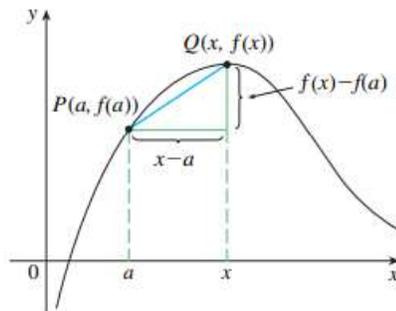


Figura 5

A inclinação da reta secante  $PQ$  é dada por:

$$m_{PQ} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Observe que se fizermos o ponto  $Q$  aproximar-se de  $P$  ao longo da curva, a inclinação da secante  $PQ$  tende a se aproximar da inclinação da tangente  $t$  (ver figura 6).

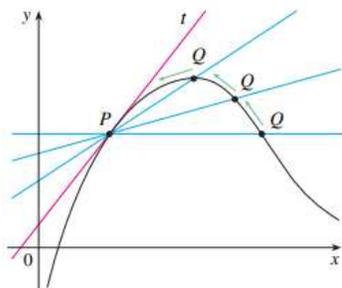


Figura 6

Dizemos então, que a inclinação da reta tangente é dada pelo limite da inclinação da secante PQ, quando o ponto Q tende ao ponto P. Observe que o ponto Q tender ao ponto P, é o mesmo que fazer  $x$  tender ao ponto  $a$ . Matematicamente temos:

$$m_t = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

A esse limite damos o nome de derivada da função  $f$  no ponto  $a$ .

Se escrevermos  $x = a + h$ , então  $h$  tende a zero quando  $x$  tende a  $a$ , e temos uma maneira equivalente de escrever a definição de derivada:

A derivada de uma função  $f$  em um ponto  $a$ , denotada por  $f'(a)$ , é

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

se o limite existir.

### 3.1.1 Exemplo resolvido

**Exemplo 1:** Calcule a inclinação da reta tangente a parábola  $y = x^2$ .

A) em um ponto genérico  $G = (x, y)$ .

B) no ponto  $P = (2, 4)$ .

*Resolução:*

A) A derivada da função  $f(x)$  num ponto  $a = x$  genérico, é dada por:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - (x)^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x+h)}{h},$$

Como  $h$  não assume o valor zero quando  $h \rightarrow 0$ , podemos cancelá-lo e escrever:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} 2x + h = 2x.$$

Isso significa dizer que para qualquer ponto  $(x, y)$  da parábola, a inclinação da reta tangente, neste ponto, vale  $2x$ .

B) Observe que, de acordo com a definição, a inclinação procurada é a derivada da função  $f(x) = x^2$ , no ponto  $P = (2, 4)$ .

$$f'(x) = 2x \Rightarrow f'(2) = 4.$$

### 3.2 Outras notações

A derivada da função  $y = f(x)$ , em relação à variável  $x$ , pode ser representada das seguintes formas:

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}f(x) = Df(x) = D_x f(x)$$

### 3.3 Regras de derivação

O cálculo de derivadas, através do limite da definição é, geralmente, um processo trabalhoso e difícil. Na prática, utilizamos um conjunto de regras de derivação que nos permitem diferenciar uma grande quantidade de funções elementares. Algumas regras são apresentadas no quadro a seguir:

Regra do múltiplo constante	$\frac{d}{dx}[cf(x)] = c \frac{d}{dx}[f(x)]$
Regra da Soma	$\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = \frac{d}{dx}[f(x)] + \frac{d}{dx}[g(x)]$
Regra da Diferença	$\frac{d}{dx}[f(x) - g(x)] = \frac{d}{dx}[f(x)] - \frac{d}{dx}[g(x)]$
Regra do Produto	$\frac{d}{dx}[f(x) \cdot g(x)] = f(x) \frac{d}{dx}[g(x)] + g(x) \frac{d}{dx}[f(x)]$
Regra do Quociente	$\frac{d}{dx} \left[ \frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{g(x) \frac{d}{dx}[f(x)] - f(x) \frac{d}{dx}[g(x)]}{[g(x)]^2}$

Observe que em todos os casos estamos supondo que as funções são deriváveis.

### 3.4 Derivadas das principais funções elementares

Apresentamos no quadro a seguir a derivada das principais funções elementares. Cada um dos resultados pode ser provado aplicando a definição de derivada.

Função Constante	$\frac{d}{dx}(c) = 0$
Função Identidade	$\frac{d}{dx}(x) = 1$

Função Potência	$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$
Função Exponencial	$\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a$ , em particular $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$
Função Logarítmica	$\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a}$ , em particular $\frac{d}{dx}(\ln x ) = \frac{1}{x}$
Funções Trigonômicas	$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \cos x$ $\frac{d}{dx}(\cos \operatorname{sec} x) = -\cos \operatorname{sec} x \cdot \cot gx$ $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\operatorname{sen} x$ $\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \cdot \operatorname{tg} x$ $\frac{d}{dx}(\operatorname{tg} x) = \sec^2 x$ $\frac{d}{dx}(\cot gx) = -\cos \sec^2 x$
Funções Trigonômicas Inversas	$\frac{d}{dx}(\operatorname{arcsen} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\frac{d}{dx}(\operatorname{arc} \cos \operatorname{sec} x) = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ $\frac{d}{dx}(\operatorname{arc} \cos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\frac{d}{dx}(\operatorname{arc} \sec x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ $\frac{d}{dx}(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{1+x^2}$ $\frac{d}{dx}(\operatorname{arc} \cot gx) = -\frac{1}{1+x^2}$

### 3.4.1 Exemplos resolvidos

**Exemplo 2:** Diferencie a função  $f(x) = 2x^5 - 7x^4 + 4x^3 - 5x + 2$ .

*Resolução:*

Aplicando as regras da soma e da potência, podemos derivar a função termo a termo e obter:

$$f'(x) = 10x^4 - 28x^3 + 12x^2 - 5.$$

**Exemplo 3:** Diferencie a função  $f(x) = \sqrt[7]{x^3} \cdot \text{sen}x$ .

*Resolução:*

Observe que podemos escrever a função como  $f(x) = x^{\frac{3}{7}} \cdot \text{sen}x$  e então aplicar a regra do produto:

$$f'(x) = x^{\frac{3}{7}} \cdot \cos x + \frac{3}{7}x^{-\frac{4}{7}} \cdot \text{sen}x \quad \text{ou} \quad f'(x) = \sqrt[7]{x^3} \cdot \cos x + \frac{3}{7\sqrt[7]{x^4}} \cdot \text{sen}x.$$

**Exemplo 4:** Diferencie a função  $f(x) = \frac{e^x + 1}{x^2}$ .

*Resolução:*

Aplicando a regra do quociente temos:

$$f'(x) = \frac{x^2 \cdot e^x - 2x(e^x + 1)}{x^4}$$

### 3.5 Regra da cadeia

Uma importante regra de derivação é a chamada regra da cadeia, que nos permite calcular a derivada da composição de funções elementares.

#### Regra da Cadeia (Composição de Funções)

Se  $F(x) = g(f(x))$ , e as funções  $f$  e  $g$  forem deriváveis então,

$$F'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

Em palavras descrevemos a regra da cadeia da seguinte forma: Se  $F(x) = g(f(x))$  então a derivada de  $F(x)$  será a derivada da função de fora  $g$  (na função de dentro  $f(x)$ ) vezes a derivada da função de dentro. O desafio está em perceber a composição a ser aplicada.

### 3.5.1 Exemplos resolvidos

**Exemplo 5:** Diferencie a função  $F(x) = \sqrt{x^3 + 1}$ .

*Resolução:*

Observe que a função  $F(x)$  é uma composição de funções. De fato, podemos definir  $g(u) = \sqrt{u}$  e  $f(x) = x^3 + 1$ , e então escrever  $F(x) = g(f(x))$ . Uma vez que  $g'(u) = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{u}}$  e  $f'(x) = 3x^2$ , basta aplicar a regra da cadeia:

$$F'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^3+1}} \cdot 3x^2 = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+1}}.$$

**Exemplo 6:** Diferencie a função  $F(x) = \text{sen}^3x$ .

*Resolução:*

Novamente temos que  $F(x)$  é uma composição de funções. Sejam  $g(u) = u^3$  e  $f(x) = \text{sen}x$ , então  $F(x) = g(f(x))$ . Aplicando a regra da cadeia, temos:

$$F'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = 3\text{sen}^2x \cdot \cos x.$$

## 3.6 Regra de L'Hospital

No cálculo de limites, são frequentes aqueles da forma  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ , em que tanto numerador quanto denominador tendem a zero, ou a infinito, quando  $x \rightarrow a$  (limites da forma  $\frac{0}{0}$  ou  $\frac{\infty}{\infty}$ ). Nesses casos, fazíamos alguma manipulação algébrica para eliminar algum termo do quociente, e então calculávamos o limite por substituição direta. Entretanto, em alguns casos, essa manipulação não é possível, e temos então um limite chamado de limite indeterminado.

Para esses casos, usamos uma aplicação de derivadas, chamada de Regra de L'Hospital:

**Regra de L'Hospital (limites indeterminados)**

Suponha que  $f$  e  $g$  sejam funções deriváveis e que  $g'(x) \neq 0$  próximo a  $a$ .

Se o  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ , for da forma  $\frac{0}{0}$  ou  $\frac{\infty}{\infty}$ , então:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

### 3.6.1 Exemplo resolvido

**Exemplo 7:** Calcule  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x}$ .

*Resolução:*

Observe que quando  $x \rightarrow 0$ , tanto numerado e denominador tendem a zero, portanto temos um limite da forma  $\frac{0}{0}$ . Como nenhuma manipulação algébrica ocorre nesse caso aplicamos a Regra de L'Hospital e obtemos:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\text{sen } x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

## 3.7 Diferenciação Implícita

Uma importante aplicação da regra da cadeia ocorre quando desejamos obter a derivada de funções que são definidas implicitamente por uma relação entre  $x$  e  $y$ . Por exemplo:

$$x^2 + y^2 = 1$$

Neste caso poderíamos resolver a equação para  $y$  como funções explícitas de  $x$

$$y = \pm\sqrt{1 - x^2}$$

e obter a derivada  $\frac{dy}{dx}$  através da regra da cadeia.

Entretanto, em algumas relações não conseguimos explicitar  $y$  em função de  $x$  com tamanha facilidade; por exemplo:

$$x^3 + y^3 = 8xy$$

Em situações como esta usamos o método de diferenciação implícita, que consiste em diferenciar ambos os lados da equação em relação a  $x$  e então resolver a equação resultante para  $y'$ .

### 3.7.1 Exemplo resolvido

**Exemplo 8:** Encontre uma equação da reta tangente à curva  $x^2 + xy + y^2 = 3$  (Elipse) no ponto P (1,1).

*Resolução:*

Diferenciando ambos os lados da equação  $x^2 + xy + y^2 = 3$  em relação a  $x$ :

$$\frac{d}{dx}(x^2 + xy + y^2) = \frac{d}{dx}(3)$$

$$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(xy) + \frac{d}{dx}(y^2) = 0$$

Lembrando que  $y$  é uma função de  $x$  e usando a Regra do Produto, para o segundo membro, e a Regra da Cadeia, para o terceiro membro, temos:

$$2x + xy' + y \cdot 1 + 2yy' = 0$$

Resolvendo para  $y'$ :

$$y' = -\frac{(2x+y)}{(x+2y)}.$$

Logo a inclinação da reta tangente é dada pela derivada, no ponto onde  $x = 1$  e  $y = 1$ :

$$m = -\frac{(2+1)}{(1+2)} = -1.$$

Portanto uma equação da reta tangente a elipse no ponto (1,1) é:

$$y - 1 = -(x - 1).$$



# CAPÍTULO IV

## INTEGRAIS

## 4 ELEMENTOS DE CÁLCULO INTEGRAL

### 4.1 A integral definida

O problema central do cálculo integral consiste em determinar o valor da área de uma figura curva. Mais especificamente, considere o problema de calcular a área  $S$  da região sob o gráfico da função  $f(x)$  (inicialmente consideraremos  $f(x) > 0$ ), e delimitadas pelas retas  $x = a$ ,  $x = b$  e  $y = 0$  (ver figura 7)

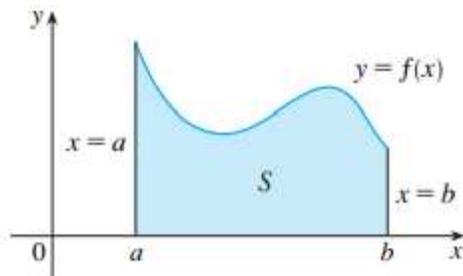


Figura 7

Para determinar o valor da área  $S$ , usaremos a seguinte estratégia: dividiremos a região  $S$ , aproximando-a por retângulos de largura constante, igual a  $\Delta x$ , e altura determinada pela função  $f(x)$ , num ponto  $x_i$  escolhido, arbitrariamente, como o ponto médio de cada subintervalo. Então, aproximaremos a área  $S$  pela soma das áreas desses retângulos (ver figura 8).

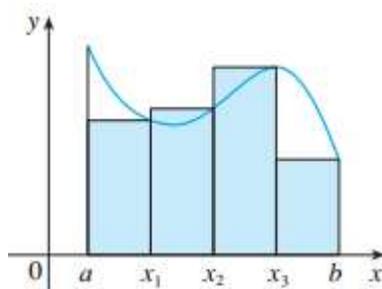


Figura 8

Temos então que  $S \approx \sum_{i=1}^4 f(x_i) \cdot \Delta x$ .

Dizer que a área  $S$  é aproximadamente a soma das áreas dos retângulos pode parecer uma afirmativa exagerada. No entanto, note que à medida que aumentamos o número de retângulos considerados a aproximação tende a melhorar (ver figura 9).

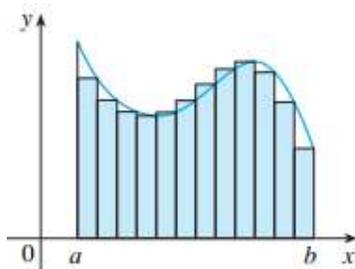


Figura 9

Diremos então que a área  $S$  é o limite das somas das áreas dos retângulos, quando o número de retângulos tender ao infinito.

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x$$

A esse limite daremos o nome de integral definida da função  $f(x)$  de  $a$  para  $b$ , e representaremos assim:

**Integral definida da função  $f(x)$  de  $a$  para  $b$**

$$S = \int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x$$

Na definição de integral definida, como sendo a área sob o gráfico da função  $f(x)$ , consideramos a função como sendo estritamente positiva. Consideremos, agora, o caso mais geral, conforme a figura 10:

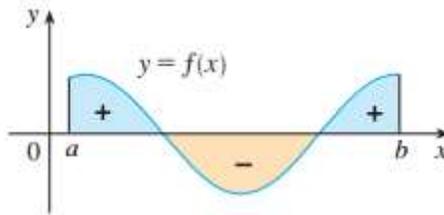


Figura 10

Chamando de  $S_1$  a região do gráfico acima do eixo  $x$  e de  $S_2$  a região do gráfico que está abaixo do eixo  $x$ , temos que em  $S_2$  os valores de  $f(x)$  são negativos, portanto, ao computar a Integral definida da função  $f(x)$  de  $a$  para  $b$ , teremos:

$$\int_a^b f(x)dx = S_1 - S_2$$

## 4.2 Cálculo de integrais (o teorema fundamental do Cálculo)

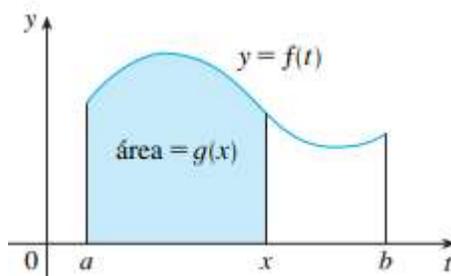
Apresentaremos agora aquele que é um dos teoremas mais importantes de toda a Matemática. Descoberto por Isaac Newton e Wilhelm Leibniz, de forma independente, o Teorema Fundamental do Cálculo relaciona os dois ramos do cálculo, que aparentemente são independentes: O problema das tangentes (cálculo diferencial) e o problema das áreas (cálculo integral). A descoberta deste teorema é considerada um dos maiores feitos do intelecto humano!

Inicialmente vamos definir  $g(x)$  como sendo a função que a cada  $x$  associa a área sob o gráfico de  $f$  no intervalo  $[a, x]$ , conforme a figura 11:

## 4.2 Cálculo de integrais (o teorema fundamental do Cálculo)

Apresentaremos agora aquele que é um dos teoremas mais importantes de toda a Matemática. Descoberto por Isaac Newton e Wilhelm Leibniz, de forma independente, o Teorema Fundamental do Cálculo relaciona os dois ramos do cálculo, que aparentemente são independentes: O problema das tangentes (cálculo diferencial) e o problema das áreas (cálculo integral). A descoberta deste teorema é considerada um dos maiores feitos do intelecto humano!

Inicialmente vamos definir  $g(x)$  como sendo a função que a cada  $x$  associa a área sob o gráfico de  $f$  no intervalo  $[a, x]$ , conforme a figura 11:



Podemos escrever  $g(x) = \int_a^x f(t) dt$ .

### O Teorema Fundamental do Cálculo (parte 1)

Se  $g(x) = \int_a^x f(x) dx$ ,  $a \leq x \leq b$ , e  $f(x)$  for uma função contínua em  $[a, b]$  então:

$$g'(x) = f(x)$$

Este teorema nos diz que a derivada da função área,  $g(x)$ , é exatamente igual a função  $f(x)$  sob a qual estamos calculando a área. Em outras palavras, estamos dizendo que integração e derivação, são processos inversos. Dizemos que a função  $g(x)$  é uma primitiva de  $f(x)$ , ou que  $g(x)$  é uma antiderivada de  $f(x)$ .

Exemplo: Uma antiderivada da função  $f(x) = 5x^3$  é a função  $g(x) = \frac{5x^4}{4} + C$ , com  $C$  constante, pois  $g'(x) = f(x) = 5x^3$  (verifique!).

**O Teorema Fundamental do Cálculo (parte 2)**

Se  $f$  for contínua em  $[a, b]$  então

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), \text{ onde } F \text{ é uma antiderivada qualquer de } f(x).$$

Em resumo, para computar o valor de  $\int_a^b f(x)dx$ , em que  $f$  é uma função contínua em  $[a, b]$  procedemos da seguinte forma:

- i) Procuramos uma antiderivada  $F(x)$ , da função  $f(x)$ .
- ii) Usamos o fato de que  $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ .

*4.2.1 Exemplos resolvidos*

**Exemplo 1:** Calcule a área  $S$  da região sombreada da figura 12.

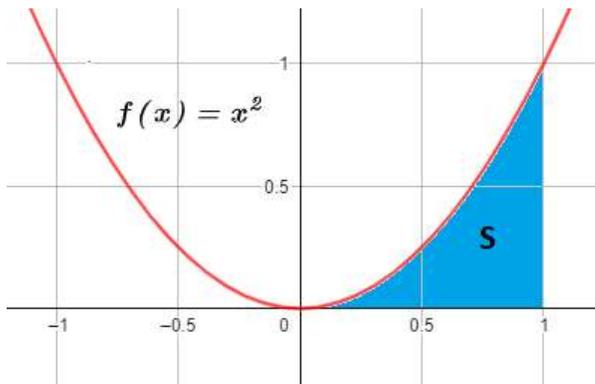


Figura 12

*Resolução:*

$$S = \int_a^b f(x)dx = \int_0^1 x^2 dx.$$

Uma antiderivada da função  $f(x) = x^2$ , é  $F(x) = \frac{x^3}{3}$  (Verifique!). Logo, pelo Teorema Fundamental do Cálculo segue que:

$$S = \int_0^1 x^2 dx = F(1) - F(0) = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}.$$

**Exemplo 2:** Calcule a área  $S$  da região sombreada da figura 13.

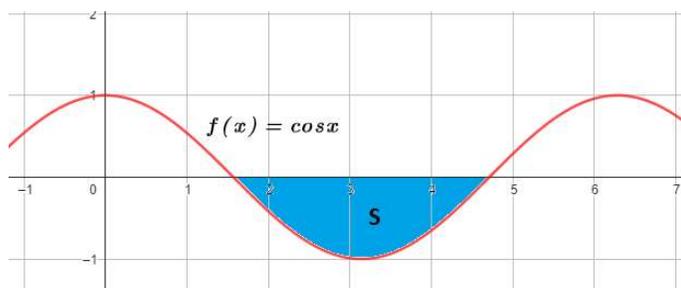


Figura 13

*Resolução:*

Como a região sombreada se encontra na parte negativa de  $f(x) = \cos x$ , o valor de  $S$  é dado por:

$$S = - \int_a^b f(x) dx = - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos x dx$$

Uma antiderivada da função  $f(x) = \cos x$ , é  $F(x) = \text{sen } x$ .

Logo:

$$S = - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos x dx = - \left[ F\left(\frac{3\pi}{2}\right) - F\left(\frac{\pi}{2}\right) \right] = - \left[ \text{sen } \frac{3\pi}{2} - \text{sen } \frac{\pi}{2} \right] = 2.$$

## 4.3 Propriedades da integral definida

Apresentamos a seguir algumas das principais propriedades da integral definida:

$\int_a^b c dx = c(b - a)$ , onde $c$ é uma constante qualquer.
$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$
$\int_a^a f(x) dx = 0$
$\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$
$\int_a^b cf(x) dx = c \int_a^b f(x) dx$ , onde $c$ é uma constante qualquer.
$\int_a^b [f(x) - g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx$
$\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$

## 4.4 Integrais elementares

O grande desafio no cálculo de integrais, está em determinar a primitiva ou antiderivada da função a ser integrada. Em alguns casos, não há métodos elementares para o cálculo da primitiva. Apresentamos a seguir, as primitivas das principais funções elementares.

Observação: Representamos uma primitiva genérica da função  $f(x)$ , simplesmente como  $\int f(x) dx$ , também chamada de integral indefinida de  $f$ .

$\int dx = x + C$	$\int \sec^2(x) dx = \operatorname{tg} x + C$
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\int \cos \sec^2(x) dx = -\operatorname{cot} gx + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int \operatorname{tg}^2(x) dx = \operatorname{tg} x - x + C$
$\int \operatorname{sen}(x) dx = -\operatorname{cos} x + C$	$\int \frac{1}{x} dx = \ln  x  + C$
$\int \operatorname{cos}(x) dx = \operatorname{sen} x + C$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
$\int \operatorname{tg}(x) dx = \ln  \sec x  + C$	

Em todos os casos,  $C$  é uma constante qualquer.

#### 4.4.1 Exemplos resolvidos

**Exemplo 3:** Calcule a área da região limitada pelas curvas  $y = x^2$  e  $y = -3x + 4$ .

*Resolução:*

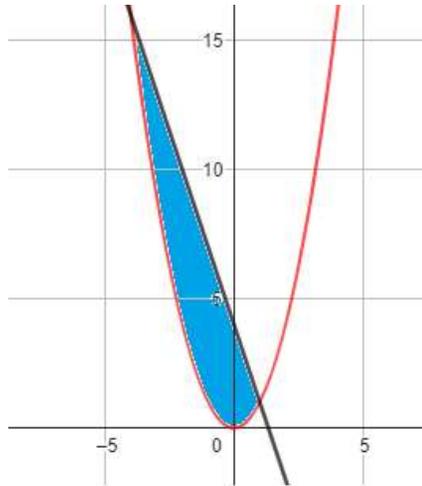
Os pontos de interseção das curvas são dados por:  
 $x^2 = -3x + 4 \Rightarrow x = -4$  ou  $x = 1$  (ver figura 14).

A área  $S$  pode ser calculada assim:

$$S = \int_{-4}^1 (-3x + 4) dx - \int_{-4}^1 x^2 dx = \int_{-4}^1 (-3x + 4 - x^2) dx$$

Uma antiderivada da função  $f(x) = -3x + 4 - x^2$  é  $F(x) = -\frac{3x^2}{2} + 4x - \frac{x^3}{3}$ . Logo:

$$S = \int_{-4}^1 (-3x + 4 - x^2) dx = F(1) - F(-4) = \left[ -\frac{3(1)^2}{2} + 4(1) - \frac{(1)^3}{3} \right] - \left[ -\frac{3(-4)^2}{2} + 4(-4) - \frac{(-4)^3}{3} \right] = \frac{125}{6}.$$



## 4.5 Regras de integração

O cálculo de integrais é, de modo geral, um processo bem mais engenhoso do que o cálculo de derivadas. Apresentamos a seguir duas das estratégias mais notáveis para o cálculo de integrais.

### 4.5.1 Regra da Substituição

Essa estratégia consiste numa mudança de variável adequada para a integração. Sugerida quando queremos integrar um produto de funções, tal que a derivada de uma das parcelas, esteja presente na outra parcela.

**Exemplo 4:** Determine  $\int x e^{x^2} dx$ .

*Resolução:*

Uma substituição adequada é chamar  $x^2 = u$ , pois derivando ambos os lados em relação a variável  $x$ , resulta em  $\frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow x dx = \frac{du}{2}$ . Observe que  $x dx$  é exatamente uma das parcelas a ser integrada. Logo fazendo a mudança de variável, temos:

$$\int x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int e^u du = \frac{1}{2} (e^u) + C = \frac{1}{2} (e^{x^2}) + C.$$

(Verifique a solução encontrada derivando-a!)

**Exemplo 5:** Determine  $\int x^2 \sqrt{x^3 + 1} dx$ .

*Resolução:*

Uma substituição adequada é chamar  $x^3 + 1 = u$ , pois derivando ambos os lados em relação a variável  $x$ , resulta em  $\frac{du}{dx} = 3x^2 \Rightarrow x^2 dx = \frac{du}{3}$ . Observe que  $x^2 dx$  é exatamente uma das parcelas a ser integrada. Logo fazendo a mudança de variável, temos:

$$\int x^2 \sqrt{x^3 + 1} dx = \frac{1}{3} \int \sqrt{u} du = \frac{1}{3} \int u^{\frac{1}{2}} du = \frac{1}{3} \left( \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \right) + C = \frac{2}{9} (x^3 + 1)^{\frac{3}{2}} + C.$$

(Verifique a solução encontrada derivando-a!)

#### 4.5.2 Integração por partes

Sabemos da regra do produto para derivação que:

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f(x) \cdot g'(x) + f'(x) \cdot g(x)$$

Integrando ambos os membros da equação resultam na expressão conhecida como integração por partes:

$$\int f(x) \cdot g'(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int g(x) \cdot f'(x) dx$$

**Exemplo 6:** Determine  $\int x \cdot \text{sen}x \cdot dx$ .

*Resolução:*

Podemos pensar em  $f(x) = x$  e  $g'(x) = \text{sen}x$ . Então  $g(x) = -\text{cos}x$  e  $f'(x) = 1$ . Usando a fórmula de integração por partes, temos:

$$\int x \cdot \text{sen}x \cdot dx = x(-\text{cos}x) - \int(-\text{cos}x) \cdot dx = -x \text{cos}x + \text{sen}x + C.$$

(Verifique a solução encontrada derivando-a!)

## REFERÊNCIAS

BOYER, Carl B. História da Matemática. Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blucher, 1996.

Eves, Howard. Introdução à História da Matemática. Tradução: Fabio Augusto Diógenes Gomes. Campinas: Editora da Unicamp, 2004.

STEWART, James. Cálculo: Volume 1. 8ª ed. São Paulo: Cengage Learning, 2017.

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. Um Curso de Cálculo: Volume 1. 6ª ed. Rio de Janeiro: LTC, 2012.

BOULOS, Paulo. Cálculo Diferencial e Integral: Volume 1. 6ª ed. São Paulo: Pearson, 2006.

SWOKOWSKI, Earl W. Cálculo com Geometria Analítica. Vol. 1. 2ª ed. São Paulo: Makron Books, 1994.

## ÍNDICE REMISSIVO

### C

Cálculo 14, 15, 16, 18, 23, 30, 33, 36, 42, 44, 45, 48, 50

### F

Função 18, 19, 20, 21, 22, 23, 25, 26, 27, 31, 32, 34, 35, 36, 38, 42, 43, 44,  
45, 46, 47, 48, 49

Fundamental 14, 25, 44, 45

### I

Inclinação 30, 31, 32, 39

### M

Matemática 44, 45, 53

### R

Resolução 25, 26, 27, 32, 34, 35, 36, 37, 38, 46, 47, 49, 50, 51, 52

## **SOBRE O AUTOR**

Felix Horacio Munoz Muniz Junior possui graduação em Matemática pela Universidade Federal de Minas Gerais (2008), graduação em Engenharia Civil pela Universidade Federal de Minas Gerais (2013), pós graduação no curso de especialização em Metodologia do Ensino de Matemática pela FAEL (2017) e Mestre em Matemática (PROFMAT) pela Universidade Federal de Viçosa (2018). É docente efetivo do Instituto Federal do Norte de Minas Gerais.

# COMPÊNDIO DO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

Este trabalho não tem como objetivo a substituição do estudo dos tradicionais textos de Cálculo utilizados como livro texto nas universidades brasileiras. Trata-se de um compêndio sobre o cálculo diferencial e integral, abordando de maneira direta e resumida os principais tópicos dessa disciplina, sem uma preocupação com demonstrações e rigor excessivo. Tem como objetivo ser um guia rápido e de fácil acesso para discentes dessa disciplina, bem como para entusiastas do assunto, que necessitem de uma compilação dos elementos fundamentais dessa teoria.

Felix Horacio Munoz Muniz Junior

RFB Editora  
Home Page: [www.rfbeditora.com](http://www.rfbeditora.com)  
Email: [adm@rfbeditora.com](mailto:adm@rfbeditora.com)  
WhatsApp: 91 98885-7730  
CNPJ: 39.242.488/0001-07  
Av. Governador José Malcher, nº 153, Sala 12,  
Nazaré, Belém-PA, CEP 66035065

