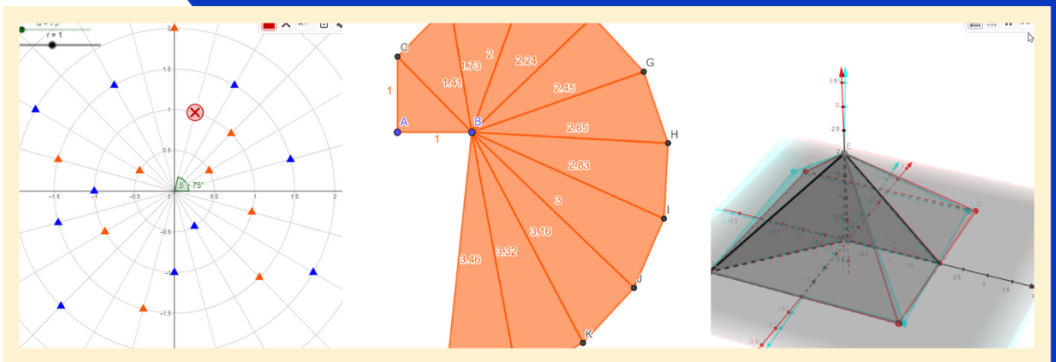


Ewerton Roosevelt Bernardo da Silva

# INICIAÇÃO AO GEOGEBRA: construções para aprender e aplicar na educação básica



**Iniciação ao Geogebra:  
construções para aprender e  
aplicar na educação básica**



Todo o conteúdo apresentado neste livro é de responsabilidade do(s) autor(es).  
Esta obra está licenciada com uma Licença Creative Commons Atribuição-SemDerivações 4.0 Internacional.

## Conselho Editorial

Prof. Dr. Ednilson Sergio Ramalho de Souza - UFOPA  
(Editor-Chefe)  
Prof. Dr. Laecio Nobre de Macedo-UFMA  
Prof. Dr. Aldrin Vianna de Santana-UNIFAP  
Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Raquel Silvano Almeida-Unespar  
Prof. Dr. Carlos Erick Brito de Sousa-UFMA  
Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Ilka Kassandra Pereira Belfort-Faculdade Laboro  
Prof<sup>a</sup>. Dr. Renata Cristina Lopes Andrade-FURG  
Prof. Dr. Elias Rocha Gonçalves-IFF  
Prof. Dr. Clézio dos Santos-UFRRJ  
Prof. Dr. Rodrigo Luiz Fabri-UFJF  
Prof. Dr. Manoel dos Santos Costa-IEMA  
Prof.<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup>. Isabella Macário Ferro Cavalcanti-UFPE  
Prof. Dr. Rodolfo Maduro Almeida-UFOPA  
Prof. Dr. Deivid Alex dos Santos-UEL  
Prof.<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup>. Maria de Fatima Vilhena da Silva-UFPA  
Prof.<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup>. Dayse Marinho Martins-IEMA  
Prof. Dr. Daniel Tarciso Martins Pereira-UFAM  
Prof.<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup>. Elane da Silva Barbosa-UERN  
Prof. Dr. Piter Anderson Severino de Jesus-Université Aix Marseille

Nossa missão é a difusão do conhecimento gerado no âmbito acadêmico por meio da organização e da publicação de livros científicos de fácil acesso, de baixo custo financeiro e de alta qualidade!

Nossa inspiração é acreditar que a ampla divulgação do conhecimento científico pode mudar para melhor o mundo em que vivemos!

*Equipe RFB Editora*

Ewerton Roosevelt Bernardo da Silva

# **Iniciação ao Geogebra: construções para aprender e aplicar na educação básica**

1ª Edição

Belém-PA  
RFB Editora  
2023

© 2023 Edição brasileira  
by RFB Editora  
© 2023 Texto  
by Autor  
Todos os direitos reservados

RFB Editora  
CNPJ: 39.242.488/0001-07  
www.rfbeditora.com  
adm@rfbeditora.com  
91 98885-7730

Av. Governador José Malcher, nº 153, Sala 12, Nazaré, Belém-PA,  
CEP 66035065

**Editor-Chefe**

Prof. Dr. Ednilson Souza

**Diagramação**

Worges Editoração

**Revisão de texto e capa**

Autor

**Bibliotecária**

Janaina Karina Alves Trigo Ramos

**Produtor editorial**

Nazareno Da Luz

**Catálogo na publicação**

Elaborada por Bibliotecária Janaina Ramos – CRB-8/9166

S586i

Silva, Ewerton Roosevelt Bernardo da

Iniciação ao Geogebra: construções para aprender e aplicar na educação básica /  
Ewerton Roosevelt Bernardo da Silva. – Belém: RFB, 2023.

58 p., fotos.; 16 X 23 cm

ISBN 978-65-5889-621-0

DOI 10.46898/rfb.92067f3d-57d7-4f63-8e23-3de6453afd22

1. Matemática - Estudo e ensino - Inovações tecnológicas. I. Silva, Ewerton  
Roosevelt Bernardo da. II. Título.

CDD 510.7

Índice para catálogo sistemático

I. Matemática - Estudo e ensino - Inovações tecnológicas

# SUMÁRIO

PREFÁCIO.....	7
CAPÍTULO I O GEOGEBRA.....	9
CAPÍTULO II ÁREA E PERÍMETRO DO TRIÂNGULO .....	15
CAPÍTULO III COORDENADAS POLARES E BATALHA NAVAL.....	19
CAPÍTULO IV DETERMINAÇÃO DE RAÍZES COM COMPASSO .....	25
CAPÍTULO V NO RASTRO DA ELIPSE .....	31
CAPÍTULO VI DESIGUALDADE ENTRE MÉDIAS ARITMÉTICA E GEOMÉTRI- CA.....	35
CAPÍTULO VII DETERMINAÇÃO DE ÁREA COM ROTAÇÃO.....	39
CAPÍTULO VIII DETERMINAÇÃO DE ÁREAS COM TRANSLAÇÃO .....	43
CAPÍTULO IX RESOLUÇÃO E CLASSIFICAÇÃO DE SISTEMAS LINEA- RES.....	47
CAPÍTULO X VISUALIZANDO UMA PIRÂMIDE ESPECIAL .....	51
REFERÊNCIAS.....	55
SOBRE O AUTOR .....	56



# PREFÁCIO

**E**sta obra foi elaborada para auxiliar quem ensina matemática e tem o desejo de incluir o Geogebra em sua prática docente. Para tanto, apresenta ferramentas desse *software* de geometria dinâmica a partir de construções rápidas, práticas e simples, envolvendo matemática básica e sugestões de intervenção em sala de aula para o/a leitor/a iniciar seu aprendizado no programa e já vislumbrar possíveis aplicações na Educação Básica.

Vale ressaltar, considerando que a maior parte das escolas brasileiras ainda não dispõe de tablets ou computadores para seus estudantes, os experimentos didáticos propostos requerem apenas um computador e um projetor, ficando o docente como responsável pela mediação.

Para melhor aproveitamento, recomenda-se ao caríssimo leitor abrir este e-book em seu dispositivo móvel e o Geogebra em seu computador. Em seguida, realizar os passos construtivos de cada capítulo, avaliando as dicas de uso em sala de aula. É desejo que, antes mesmo de concluir o estudo deste material, o leitor esteja à vontade para planejar suas primeiras aulas com esse recurso que já foi protagonista em inúmeras experiências exitosas no ensino de matemática.





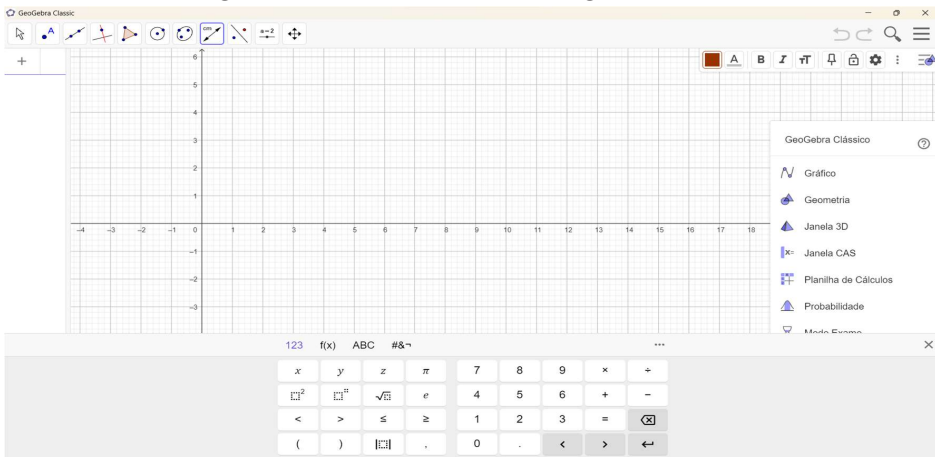
# CAPÍTULO I

## O GEOGEBRA

Neste livro, apresenta-se atividades elaboradas no computador a partir da versão clássica do Geogebra, disponível para download gratuito em <https://www.geogebra.org/download?lang=pt>. Porém o leitor também pode fazer a opção de utilizar a versão online, não sendo necessário instalação, disponível em <https://www.geogebra.org/classic?lang=pt> PT.

Ao abrir o programa no computador, depre-se com a tela da Figura 1. Que exibe barras de título e de ferramentas, janela de álgebra à esquerda, janela de visualização 2D com o plano cartesiano e uma malha, bem como outros elementos que somem ao dar um clique no centro da tela.

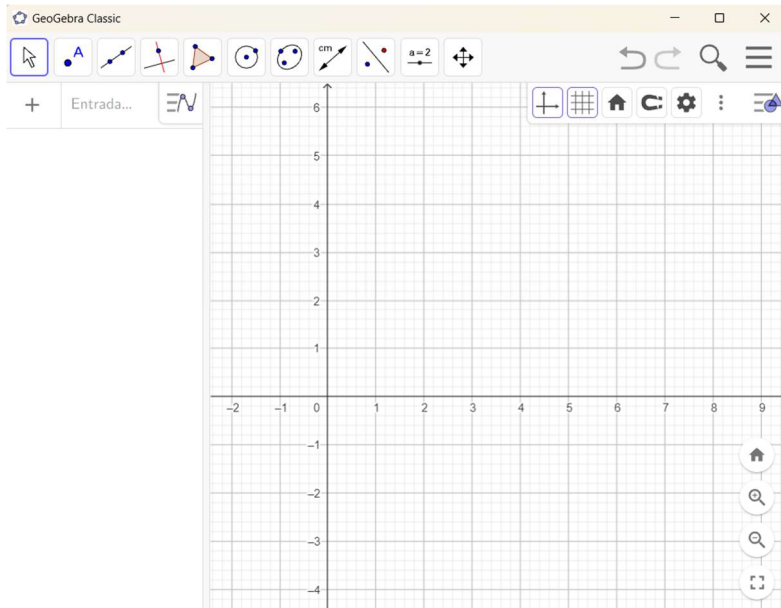
Figura 1: tela de abertura do Geogebra Clássico



Fonte: Autor, 2023

Na tela do computador, pode-se optar por reduzir a janela do programa, para uma visualização mais compacta, como ilustra a Figura 2. Bem como, decidir por outros formatos de exibição da malha e dos eixos, como se vê na porção superior direita da tela na Figura 2.

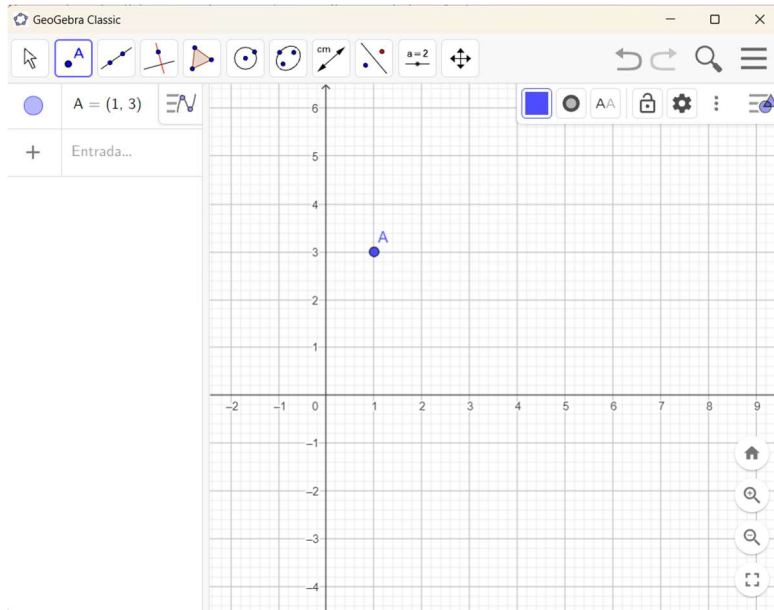
Figura 2: janela restaurada do Geogebra.



Fonte: Autor, 2023

Para uma rápida interação, abra seu Geogebra e selecione a ferramenta Ponto na porção superior esquerda da tela, em seguida clique no local do plano de coordenadas (1, 3). Aparecerá um ponto denominado A no local do clique. Na janela de Álgebra, surgirá a indicação do ponto A com suas coordenadas. E a barra na porção superior direita, que antes tratava da exibição dos eixos e das malhas, será modificada para configurações de ponto, conforme Figura 3.

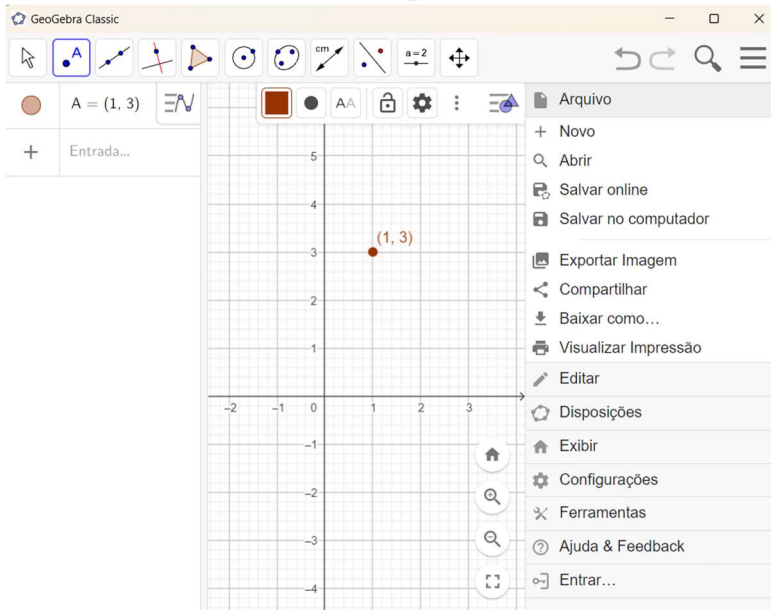
Figura 3: ferramenta Ponto em uso no Geogebra.



Fonte: Autor, 2023

Experimente alterar a exibição do ponto: mude cor, estilo do ponto e estilo do rótulo, de modo a configurar conforme a Figura 4.

Figura 4: janela do Geogebra com alterações da exibição do ponto e menu em destaque.

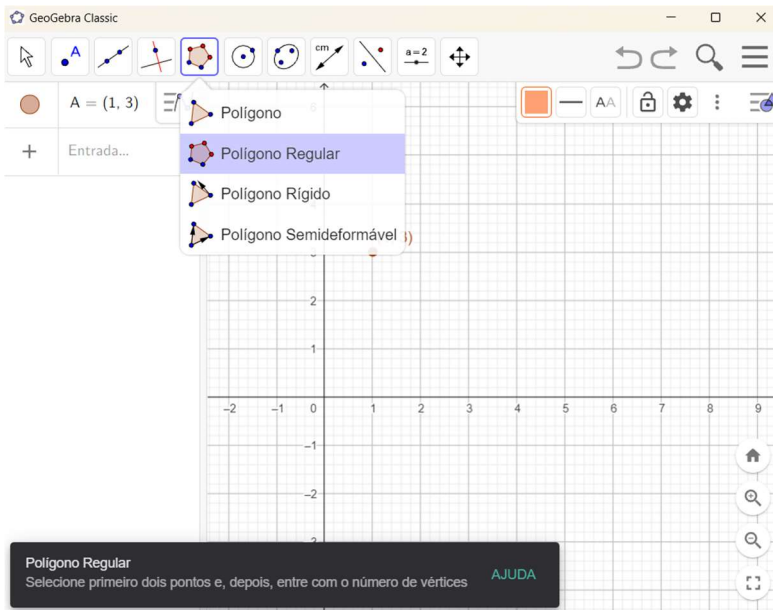


Fonte: Autor, 2023.

Ainda na Figura 4, em seu lado direito, vê-se um menu, no qual está selecionada a opção Arquivo. Nela o leitor poderá encontrar comando para salvar o arquivo em seu computador, ação recomendada durante as lições deste livro.

Na barra de ferramentas, ao clicar em cada botão, abre-se um menu vertical com diversas opções de ferramentas. Ao selecionar qualquer uma delas, o programa emite uma instrução do que fazer para usar a ferramenta escolhida, facilitando ao iniciante. Veja na Figura 5, porção inferior esquerda da tela, as instruções para aplicar a ferramenta Polígono Regular.

Figura 5: janela do Geogebra com destaque para a ferramenta Polígono Regular.



Fonte: Autor, 2023.

Sem qualquer compromisso, explore as ferramentas tentando usar todas que conseguir, depois, vá ao menu Arquivo e clique em Novo, salve o que tenha feito se preferir. Então, poderá avançar para o próximo capítulo.

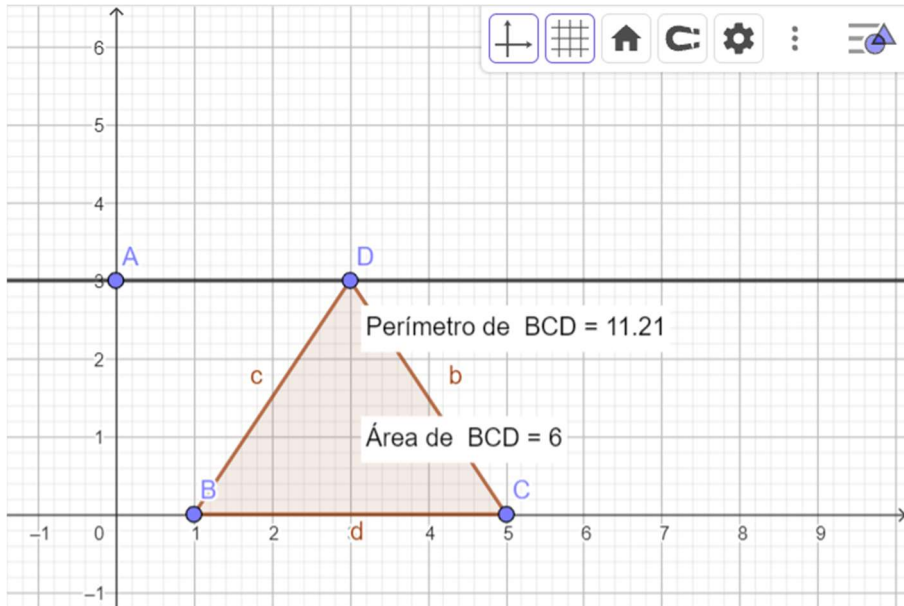
# CAPÍTULO II

## ÁREA E PERÍMETRO DO TRIÂNGULO



Neste capítulo, faremos a construção de um triângulo com um vértice móvel, base e altura fixas. Utilizaremos ferramentas de medição do Geogebra para indicar sua área e seu perímetro. É esperado que aos seguir as instruções seguintes, o leitor construa imagem similar à Figura 6:

Figura 6: plano no Geogebra com triângulo de base fixa e um vértice móvel.



Fonte: Autor, 2023

#### Instruções:

1. Utilize a ferramenta Ponto para construir os pontos A (0,3), B (1,0) e C (5,0);
2. Com a ferramenta Reta Paralela, selecione o ponto A e, em seguida, o eixo horizontal;
3. Com Ponto, marque o ponto D sobre a reta construída no passo anterior;
4. Selecione a ferramenta Polígono, em seguida os pontos B, C, D e B;

5. Para medir a área do triângulo BCD, selecione a ferramenta Área e clique no interior do triângulo. Deverá surgir a legenda “Área de BCD = 6”;
6. Para medir o perímetro, utilize a ferramenta Distância, Comprimento ou Perímetro no triângulo BCD.

Agora, com a ferramenta Mover, clique no ponto D e desloque-o sobre a reta. Será possível perceber que a área permanecerá inalterada, enquanto o perímetro assumirá valores diferentes.

Sabemos que a área do triângulo depende somente das medidas de uma base e da altura relativa, como o lado BC é fixo e o vértice D move-se numa paralela de BC, a altura relativa a esse lado permanece constante, com isso não ocorre alteração da área de BCD.

Enquanto o perímetro depende dos comprimentos dos lados, e dois deles, BD e CD, são dilatados ou comprimidos conforme o movimento do ponto D, temos variação do perímetro do triângulo BCD.

Consequentemente, se o intuito for de construir triângulos de mesma base e mesmo perímetro, então o vértice móvel não deverá percorrer uma reta paralela à base fixa. Logo sua trajetória descreve uma curva diferente, essa curva será tratada no capítulo V.

Em sala de aula, além de explorar os conceitos de área, perímetro e paralelismo no ensino fundamental, a construção desenvolvida possibilita iniciar investigação para descobrir qual o triângulo de menor perímetro nessas condições, um problema de otimização que resultará na indicação do triângulo isósceles, sendo (3, 3) as coordenadas do ponto D para esse caso particular.

Essa abordagem pode se dar no ensino médio com Geometria Analítica em aplicação da fórmula da distância entre dois pontos,

resgatando ainda conhecimentos da função quadrática. Como o lado BC é fixo, apenas BD e CD influenciam na variação do perímetro, logo seu menor valor ocorre na menor soma possível para esses dois lados. Considerando essa soma a partir das coordenadas dos vértices do triângulo e assumindo  $D(x, 3)$ , temos que

$$\begin{aligned} d(B, D) + d(C, D) &= \sqrt{(x-1)^2 + (0-3)^2} + \sqrt{(x-5)^2 + (0-3)^2} \\ &= \sqrt{(x-1)^2 + 9} + \sqrt{(x-5)^2 + 9} \\ &= \sqrt{x^2 - 2x + 10} + \sqrt{x^2 - 10x + 34} \end{aligned}$$

Interessa saber para qual valor de  $x$  essa expressão encontra seu menor valor numérico. Para tanto, somamos os radicandos e exploramos a função quadrática associada,  $f(x) = x^2 - 6x + 22$ , que encontra seu menor valor para

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-6)}{2} = 3.$$

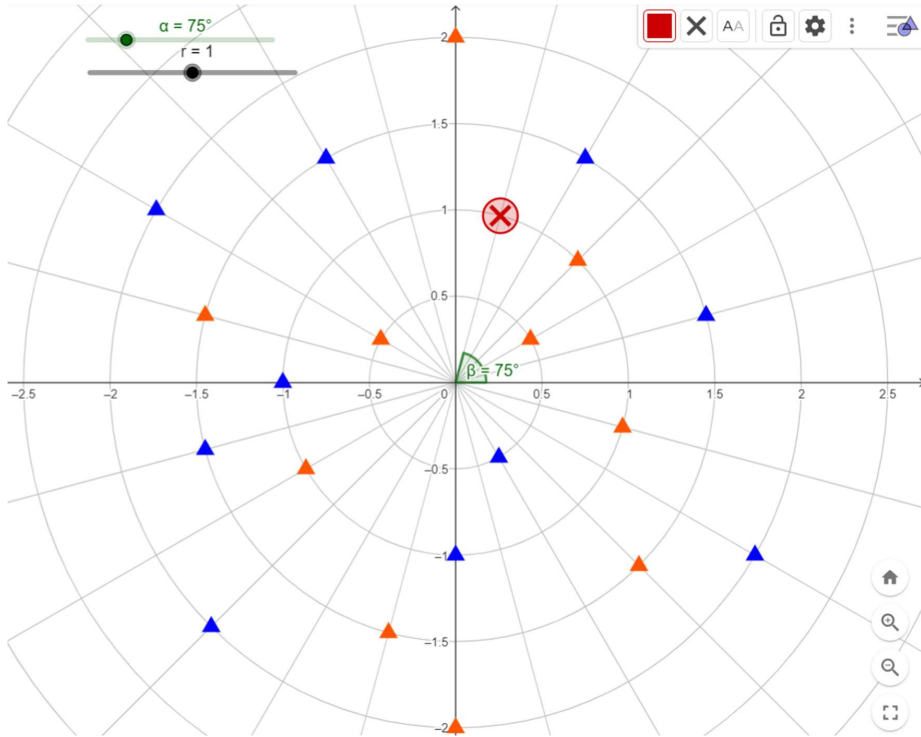
Portanto, o triângulo BCD de menor perímetro é aquele com  $D(3, 3)$ , note que com essas coordenadas,  $d(B, D) = d(C, D) = \sqrt{13}$ , isto é, BCD é um triângulo isósceles.

# CAPÍTULO III

## COORDENADAS POLARES E BATALHA NAVAL

A construção proposta neste capítulo envolve a ferramenta Controle Deslizante para definir parâmetros na determinação de segmento e de ângulo. Com variações na malha e no estilo dos pontos, teremos uma aplicação lúdica para sala de aula, com visual similar ao da Figura 7.

Figura 7: janela de visualização 2D do Geogebra com malha polar.



Fonte: Autor, 2023.

Instruções:

1. Selecione Controle Deslizante, clique na tela, escolha a opção número, letra r e variação de 0 a 2, com incremento de 0.5, confirme e deixe-o na posição 1;

2. Com a mesma ferramenta crie outro controle, escolha a opção ângulo, variando de  $0^\circ$  a  $360^\circ$  com incremento de  $15^\circ$ , confirme e deixe-o em  $75^\circ$ ;
3. Selecione Ponto e crie o ponto A (0,0);
4. Utilize a ferramenta Segmento com Comprimento Fixo, clique no ponto A e digite r, isso determinará o ponto B;
5. Com a ferramenta Ângulo com Amplitude Fixa, selecione o ponto B e digite o caractere alfa, confirme e surgirá o ponto B';
6. Clique com o botão contrário do mouse sobre A, em seguida em Exibir Objeto, com isso não será exibido o ponto A. Faça o mesmo com o ponto B com e o segmento AB;
7. Em Configurações, na aba Malha, escolha o tipo Polar, Distância  $r = 0.5$  e ângulo  $\pi/12$ , se preferir altere a cor para uma mais escura;
8. Selecione o ponto B', em Configuração altere Estilo do Ponto para o X e deixe Tamanho do Ponto em 8. Escolha vermelho ou outra cor de sua preferência. Ainda nas configurações, aba Básico, desmarque a opção Exibir Rótulo;
9. Use a ferramenta Ponto e crie vinte pontos sobre a malha, no raio variando de 0 a 2, com incremento de 0.5. Selecione todos eles e, a exemplo do item anterior, altere o Estilo do Ponto para o triângulo, Tamanho do Ponto: 7, desmarque Exibir Rótulo e selecione a cor que desejar;
10. Agora, selecione apenas dez dos vinte pontos e altere a cor;

11. Use a ferramenta Ampliar e/ou Reduzir até que o zoom fique adequado para maximizar na janela de visualização o círculo de raio igual a 2 e centro na origem;
12. Posicione os controles deslizantes no local que não sobreponha esse círculo, para tanto use a ferramenta Mover;
13. Mova os controles deslizantes na tentativa de acertar o X em algum triângulo (ponto), testando a construção.

Havendo finalizado com êxito, o leitor terá construído o elemento visual de um jogo de batalha naval. A fim de explorar a noção de arco, ângulo e raio de modo divertido, como uma preparação à circunferência trigonométrica, pode-se aplicar a seguinte dinâmica em sala de aula.

- Projetar essa construção do Geogebra no quadro;
- Dividir a turma em duas grandes equipes e cada equipe em duplas;
- Cada equipe deve ter uma cor, no exemplo, azul ou laranja;
- O jogo começa com uma dupla da equipe azul que informa um ponto por coordenadas polares, um integrante diz o valor do raio e o outro diz o valor do ângulo, com o objetivo de acertar um triângulo da outra cor, isto é, um navio laranja;
- O/a docente seleciona esses valores nos controles deslizantes e o X marcará o local do tiro. Se acertar algum navio, o/a docente apagará esse ponto no Geogebra. Caso contrário, “tiro na água!”;
- Havendo acerto ou não, será a vez de uma dupla da outra equipe;

- Vence o jogo a equipe que primeiro eliminar todos os navios inimigos.

Esse jogo pode ser adaptado segundo as condições da turma e objetivos de aprendizagem, sendo as regras acima apenas uma sugestão.





# CAPÍTULO IV

## DETERMINAÇÃO DE RAÍZES COM COMPASSO

Aqui apresentamos uma possibilidade de utilizar o Geogebra para emular construções geométricas com régua e compasso, de modo que o docente pode projetar o passo a passo da construção no software, enquanto a turma acompanha com régua e compasso tradicionais.

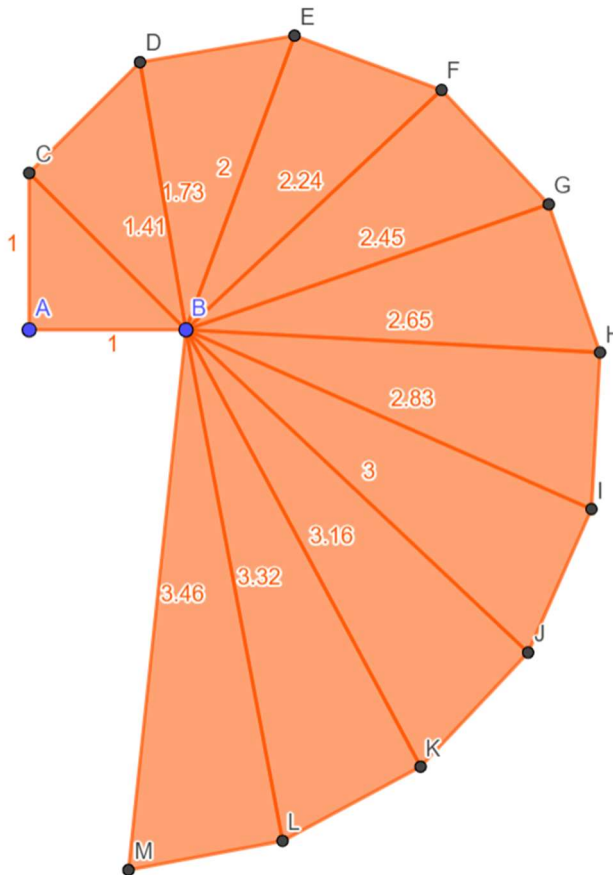
Para conhecer a ferramenta Compasso, vamos a uma atividade embasada no teorema de Pitágoras que permite determinar o valor da raiz quadrada de números naturais.

1. Use Ponto e crie os pontos  $A(0,0)$ ,  $B(1,0)$ ;
2. Com a ferramenta Segmento, selecione  $A$  e depois  $B$ , determinando o segmento  $AB$ ;
3. Selecione Reta Perpendicular, clique no segmento  $AB$  e, em seguida, no ponto  $A$ ;
4. Com a ferramenta Compasso, clique no seguimento  $AB$ , isso definirá a abertura do compasso, e depois no ponto  $A$ ;
5. Com Ponto, marque uma interseção entre a circunferência criada pelo compasso e reta perpendicular, determinando o ponto  $C$ ;
6. Com Polígono, selecione os pontos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $A$ , criando o triângulo retângulo  $ABC$ ;
7. Repita o passo 3 sobre  $BC$ ;
8. Repita o passo 4, com abertura  $AB$ , mas com centro em  $C$ ;
9. Repita o passo 5, sobre a nova perpendicular, determinando o ponto  $D$ ;
10. Repita o passo 6, de modo a determinar o  $BCD$ ;
11. Repita os últimos 4 passos até obter o enésimo triângulo retângulo desejado;

12. Use a ferramenta Exibir/Esconder Rótulo para despoluir a construção, deixando de exibir os rótulos indesejados;
13. Selecione Distância, Comprimento ou Perímetro, clique nas hipotenusas dos triângulos criados.

Com isso, obtemos construção similar à da Figura 8, também conhecida como Espiral de Teodoro.

Figura 8: sequência de triângulos retângulos (Espiral de Teodoro)



Fonte: Autor, 2023.

Nota-se que as hipotenusas medem raízes quadradas dos números naturais maiores ou iguais a 2. Isto porque a terna  $(1, \sqrt{n}, \sqrt{n+1})$  é pitagórica. De fato,  $(\sqrt{n+1})^2 = n+1 = (\sqrt{n})^2 + 1^2$ .

Em sala de aula do nono ano do ensino fundamental, os estudantes poderão praticar o Teorema de Pitágoras e a noção de perpendicularidade no manuseio de régua e compasso com a seguinte atividade.

Primeiro, deve-se ensinar como manusear o compasso, para tanto, é válido ensinar como se determina uma reta perpendicular. A partir daí, o docente executa a construção abordada neste capítulo e a turma vai traçando perpendiculares e transferindo a medida de AB com o compasso tradicional.

Aqui, uma dica importante, o docente tem a opção de fazer a construção antes da aula e levá-la pronta. Porém, no momento da construção ele não precisará refazer, basta selecionar a janela Protocolo de Construção no menu Exibir. Nela, apresentará botões que permitirão avançar no passo a passo de sua construção, inclusive com a opção de dar um play para o avanço automático.

Na atividade, os estudantes poderão cumprir uma meta que pode ser atingir a construção do terceiro triângulo. Se começou com AB medindo 1 cm, a hipotenusa do terceiro triângulo deverá ser a raiz quadrada de 4. Logo, eles podem utilizar a parte milimetrada da régua para verificar se conseguiram êxito, isto é, se encontraram a medida de 2 cm.

Porém, fazer abertura de 1 cm no compasso pode trazer maior dificuldade, sendo mais viável uma abertura maior. Nesse caso, no planejamento, o docente pode escolher padronizar uma medida de  $x$  cm, sabendo que  $(x, x\sqrt{n}, x\sqrt{n+1})$  também é uma terna pitagórica, pois

$$x^2 + (x\sqrt{n})^2 = x^2 + x^2n = x^2(n + 1) = (x\sqrt{n + 1})^2$$

Logo, como o  $n$ -ésimo triângulo tem hipotenusa medindo  $x\sqrt{n + 1}$ , o terceiro triângulo terá hipotenusa medindo  $2x$ .



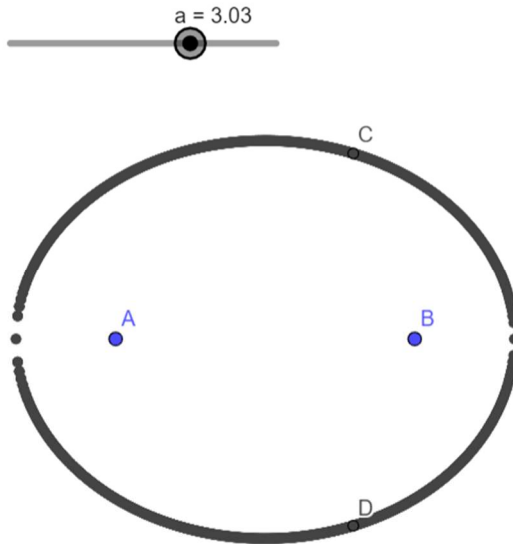
# CAPÍTULO V

NO RASTRO DA ELIPSE



Neste capítulo, utilizaremos a opção de Exibir Rastro aliada a um Controle Deslizante para demonstrar uma forma de construir a elipse da figura seguinte.

Figura 9: elipse com focos A e B.



Fonte: Autor, 2023.

Instruções:

1. Use a ferramenta Ponto e crie A (2, 0) e B (5, 0);
2. Crie um Controle Deslizante, número a variando de 1 a 4;
3. Utilize a ferramenta Círculo: Centro & Raio, selecione o ponto A e digite "a" para o valor do raio, confirme;
4. Com a mesma ferramenta, selecione o ponto B e informe o valor "5 - a" para o raio, confirme;
5. Selecione Interseção de Dois Objetos e clique nas circunferências construídas, de modo a criar os pontos C e D;
6. Clique com o botão direito sobre uma das circunferências e desmarque a opção Exibir Objeto;

7. Repita o passo anterior para a outra circunferência;
8. Clique com o botão direito sobre o ponto C e marque a opção Exibir Rastro;
9. Repita o passo anterior para o ponto D;
10. Se preferir, retire a malha e os eixos da visualização.;
11. Clique com o botão direito sobre o controle deslizante e selecione Animação.

O efeito será a determinação de uma elipse pelos pontos C e D, com focos A e B. Em sala de aula, essa construção no Geogebra poderá ilustrar a resolução do seguinte problema: um pedreiro recebeu o projeto de uma fonte para construir em um jardim, porém foi surpreendido com o formato, acreditava que seria circular, e daí iria fazer como sempre: cravar uma estaca no centro, esticar uma linha e riscar o chão do terreno. No entanto, a fonte tem formato de uma elipse, como demarcar seus limites no chão?

Notamos que os triângulos ABC e ABD tem base e perímetro em comum, logo uma solução ao problema passa por fincar uma estaca em cada foco e amarrar uma linha ligando as estacas, o comprimento dessa linha deve ser igual à soma dos comprimentos dos lados AC e BC.

A opção de habilitar o rastro também pode ser utilizada em pontos parametrizados por um Controle Deslizante, com  $(a, 2a+1)$ , com a variando de -2 a 2, tendo 1 como incremento. Esse exemplo pode ser utilizado para auxiliar os estudantes na construção do gráfico da função afim ponto a ponto, na descoberta de que se trata de uma reta.



# CAPÍTULO VI

## DESIGUALDADE ENTRE MÉDIAS ARITMÉTICA E GEOMÉTRICA

A média aritmética simples é a medida estatística de tendência central mais lembrada pelos estudantes da educação básica, seja por fazer parte do vocabulário popular - por vezes aplicada erroneamente - ou pelo repetido cálculo das médias bimestrais de seu boletim.

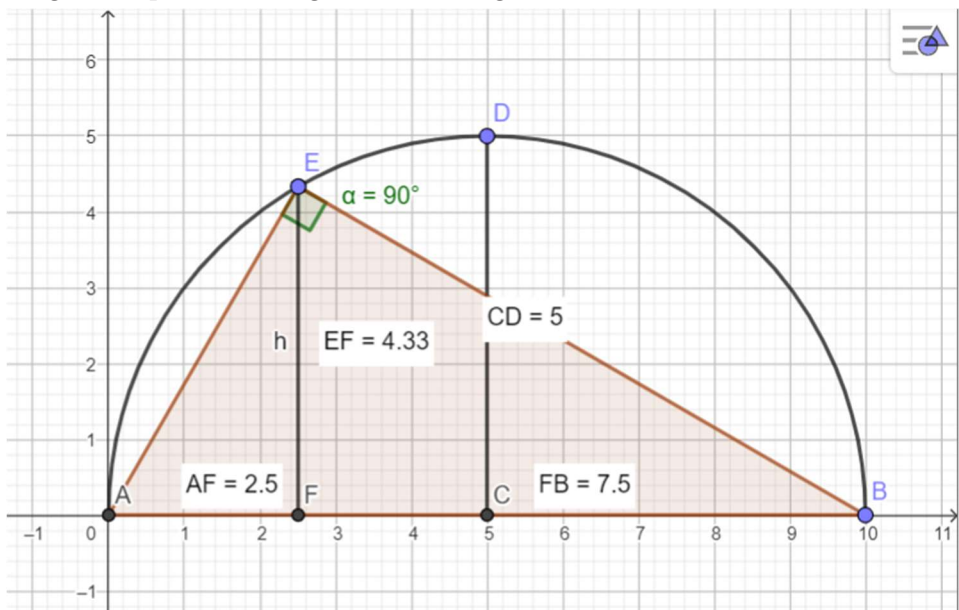
Outra forma de se determinar uma média entre dois ou mais valores positivos é a média geométrica, na qual se extrai a raiz enésima do produto dos  $n$  valores dados. Essa pode ter melhor adequação que a média aritmética quando esses valores se aproximam de uma progressão geométrica, também é utilizada na resolução de alguns problemas geométricos, como na elipse.

A partir de agora, veremos no Geogebra que existe uma relação entre essas duas médias. Seguem os passos construtivos.

1. Com a ferramenta Semicírculo, selecione os pontos A (0,0) e B (12,0);
2. Aplique a ferramenta Ponto Médio ou Centro no semicírculo, determinando o ponto C (5,0);
3. Com a ferramenta Ponto, marque o ponto D (5,5);
4. Com a ferramenta Segmento, trace o raio CD;
5. Utilize Polígono para traçar o triângulo ABE;
6. Selecione Ângulo, em seguida os pontos A, E e B, é esperado um ângulo reto;
7. Com Reta Perpendicular, selecione o ponto E e o eixo horizontal;
8. Escolha Interseção de Dois Objetos, clique na reta construída e no eixo horizontal, definindo o ponto F;

9. Clique com o botão direito sobre a reta perpendicular, em seguida em “Exibir Objeto”, isso esconderá a reta a fim de não poluir o desenho;
10. Use a ferramenta Segmento e construa EF;
11. Selecione Distância, Comprimento ou Perímetro e clique nos pontos A e F, F e B, C e D, e E e F, obtendo a Figura 10.

Figura 10: plano no Geogebra com triângulo inscrito numa semicircunferência.



Fonte: Autor, 2023

Nessa construção, ao mover o ponto E sobre o semicírculo, observe que o ângulo  $\hat{AEB}$  é sempre reto, logo o triângulo ABE é retângulo. Considere a relação métrica em que a medida de EF (altura)  $h$ , está relacionada às projeções  $m$  e  $n$ , medidas de AF e FB respectivamente, de forma que,  $h^2 = m \cdot n \Rightarrow h = \sqrt{m \cdot n}$ . Logo, a medida de EF é a média geométrica entre as medidas de AF e de FB.

Por outro lado, a soma das medidas de AF e FB corresponde ao diâmetro AB. Como o raio é a metade do diâmetro, a medida de

CD é a metade da soma das projeções  $m$  e  $n$ , isto é, a média aritmética entre elas.

Ao mover o ponto  $E$ , notamos que a média aritmética (medida de  $CD$ ) é sempre maior ou igual à média geométrica (medida de  $EF$ ). Essa desigualdade pode ser trabalhada em sala de aula na resolução de problemas, inclusive na preparação para olimpíadas de matemática. Contudo, como vimos, envolve outros dois resultados presentes nos estudos de Geometria Plana na Educação Básica, relações métricas no triângulo retângulo e ângulo inscrito na circunferência.

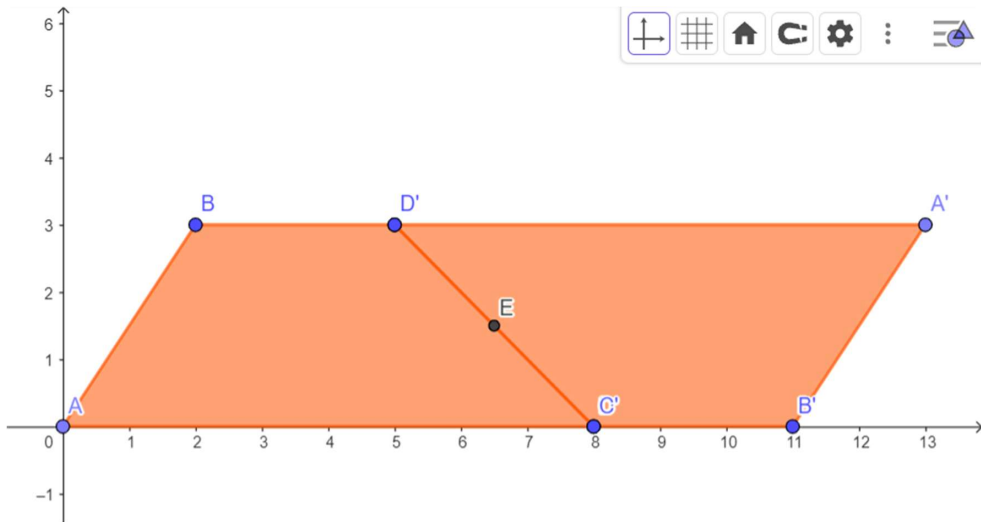
# CAPÍTULO VII

## DETERMINAÇÃO DE ÁREA COM ROTAÇÃO



No intuito da abordagem construtivista das fórmulas de área de figuras planas, temos o desafio de descobrir a fórmula da área do trapézio. Para tanto, podemos utilizar a ferramenta Rotação em Torno de um Ponto no Geogebra, obtendo imagem como a seguinte.

Figura 11: comparação entre área de trapézio e paralelogramo.



Fonte: Autor, 2023.

Vamos às instruções:

1. Com a ferramenta Polígono, clique nos pontos  $A(0,0)$ ,  $B(2,3)$ ,  $C(8,0)$  e  $D(5,3)$  para criar o trapézio escaleno ABCD;
2. Selecione a ferramenta Ponto Médio ou Centro, em seguida os pontos C e D, determinando o ponto médio E;
3. Utilize a ferramenta Rotação em Torno de um Ponto, clicando no trapézio e depois no ponto E, digite  $180^\circ$ , sentido anti-horário.

Pronto, com três passos temos a construção que fundamenta uma dedução da fórmula da área de um trapézio.

Note que os dois trapézios são congruentes e, da forma que ocorreu sua composição, formam um paralelogramo que tem a mesma altura ( $h$ ), porém sua base corresponde a soma das duas bases do trapézio ( $B$  e  $b$ ).

Considerando que a área desse paralelogramo é dada pelo produto da base pela altura, teremos área igual a  $(B+b)h$ . Como é composto por dois trapézios congruentes, cada um deles tem área igual a metade de  $(B+b)h$ .

Ainda no ensino fundamental, a partir do sétimo ano, o docente pode realizar essa construção em sala de aula e solicitar que calculem a área do paralelogramo formado, o que poderá ser feito observando os valores de base e altura nos eixos. No exemplo, a base mede 11 e o altura mede 3.

Os alunos poderão fazer suas contas. Depois o docente anota as respostas no quadro e faz a correção. Na sequência pergunta se é possível descobrir a área de cada trapézio sabendo a área desse paralelogramo.

Com mediação, chega-se à conclusão de que é a metade da área do paralelogramo. Então, é possível utilizar a ferramenta Área do Geogebra para que o software confirme os resultados.

A partir daí, o docente pode continuar indagando sua turma de modo a conduzir uma investigação que busca deduzir a área do trapézio, ou mostrar que a base do paralelogramo é a soma das bases do trapézio e daí apresentar a fórmula.



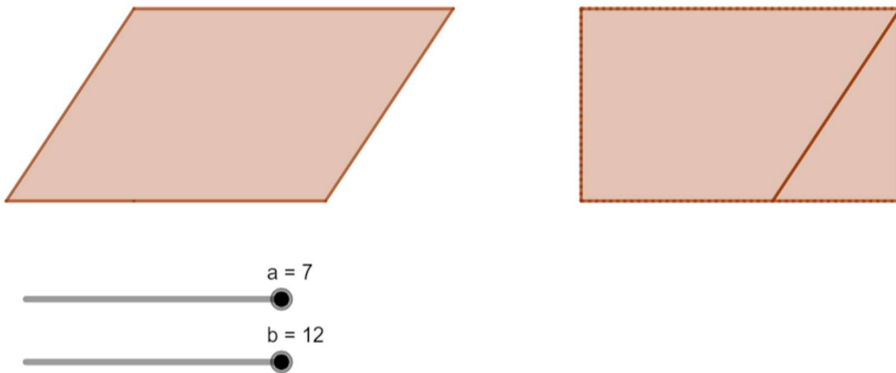
# CAPÍTULO VIII

## DETERMINAÇÃO DE ÁREAS COM TRANSLAÇÃO

Decorar fórmulas não deve ser o objetivo primordial das aulas de matemática. Porém, é necessário conhecer diversas relações e fórmulas para auxílio na resolução de problemas na escola e fora dela. Por exemplo, o cálculo de áreas é imprescindível para o orçamento de uma reforma com troca do piso residencial.

Uma alternativa de abordagem das fórmulas para área de quadriláteros em sala de aula é pela (de)composição de figuras. A construção seguinte mostra uma decomposição que transforma um paralelogramo em um retângulo de mesma base e altura. Para tanto, utilizaremos a ferramenta Translação por um Vetor no Geogebra, para que seja possível visualizar o movimento da transformação, conforme Figura 12.

Figura 12: comparação de áreas entre paralelogramo e retângulo.



Fonte: Autor, 2023.

Instruções:

1. Com a ferramenta Ponto, crie os pontos A (2, 0), B (7, 0), C (9, 3), D (4, 3), E (4, 0), F (2, 4) e G (2, 5).
2. Selecione a ferramenta Polígono e em seguida os pontos A, B, C, D e A, obtendo o paralelogramo ABCD;

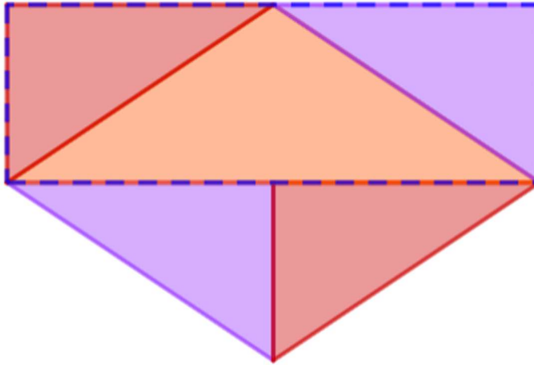
3. Com Polígono, selecione os pontos A, B, E e A, obtendo o triângulo ABE;
4. Utilizando Polígono, selecione os pontos E, B, C, D e E, obtendo o trapézio BCDE;
5. Selecione a ferramenta Controle Deslizante e configure o número “a”, variando de 0 a 7;
6. Repita o passo anterior, criando o número “b”, variando de 0 a 12;
7. Escolha a ferramenta Segmento com Comprimento Fixo, selecione o ponto F e digite “a” para seu comprimento, surgirá o segmento FH;
8. Repita o passo anterior, selecionando G e digitando “b” para o comprimento, surgirá o segmento GI;
9. Com a ferramenta Vetor, crie os vetores FH e GI;
10. Selecione Translação por um Vetor, clique no triângulo ABE e em seguida no vetor GI;
11. Com Translação por um Vetor, clique no trapézio BCDE e depois no vetor FH;
12. Utilize a ferramenta Exibir/Esconder Objeto para esconder todos os pontos e os vetores (e seus segmentos);
13. Utilize a ferramenta Exibir/Esconder Rótulo para esconder o rótulo dos polígonos e de seus segmentos;
14. De modo opcional, retire a malha e os eixos da visualização.

Pronto, com essa construção, ao mover os controles deslizantes em seu percurso total, será possível visualizar duas partes que

compõem o paralelogramo serem copiadas e transladadas de modo a formar um retângulo de mesma base e altura.

De modo análogo, faz-se a demonstração da área de um losango, como indica a figura seguinte.

Figura 13: comparação de área entre losango e retângulo.



Fonte: Autor, 2023.

Nessa outra proposta, o losango é dividido em três triângulos, sendo os dois menores congruentes entre si. Esses dois são transladados convenientemente, ficando ao lado do triângulo maior, formando um retângulo de base igual a diagonal maior do losango e altura correspondendo à metade da diagonal menor, de onde se deduz a fórmula da área do losango a partir da área do retângulo.

# CAPÍTULO IX

## RESOLUÇÃO E CLASSIFICAÇÃO DE SISTEMAS LINEARES

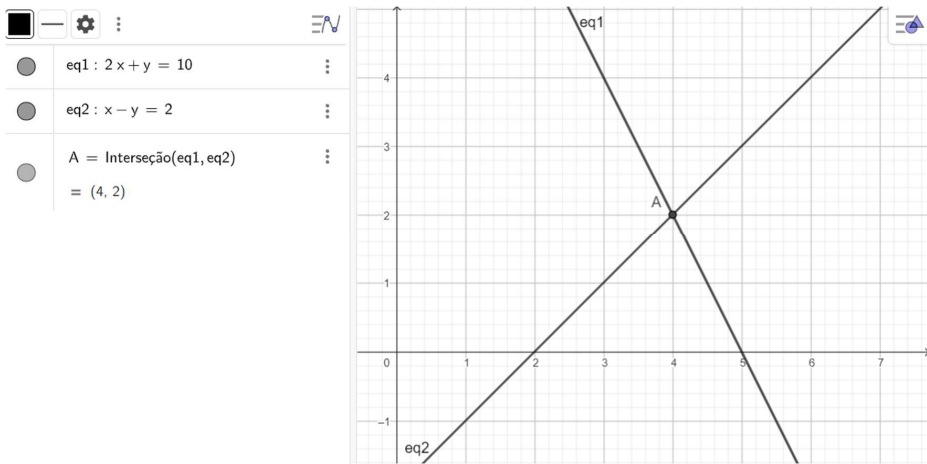


**A**lém das ferramentas para exploração de geometria plana e espacial, o Geogebra possibilita a plotagem de gráficos de funções e das representações geométricas de equações. Neste capítulo, utilizaremos o campo de entrada do software para proceder uma construção muito simples, porém útil à resolução de sistemas lineares  $2 \times 2$  e  $3 \times 3$ .

1. Digite no campo de entrada  $2x + y = 10$  e pressione enter;
2. Insira a segunda equação,  $x - y = 2$ ;
3. Use a ferramenta Interseção de Dois Objetos e selecione as duas retas correspondentes às equações, determinando o ponto A.

Com isso, o leitor visualiza uma imagem como a seguinte.

Figura 14: gráfico de equações lineares com duas incógnitas.



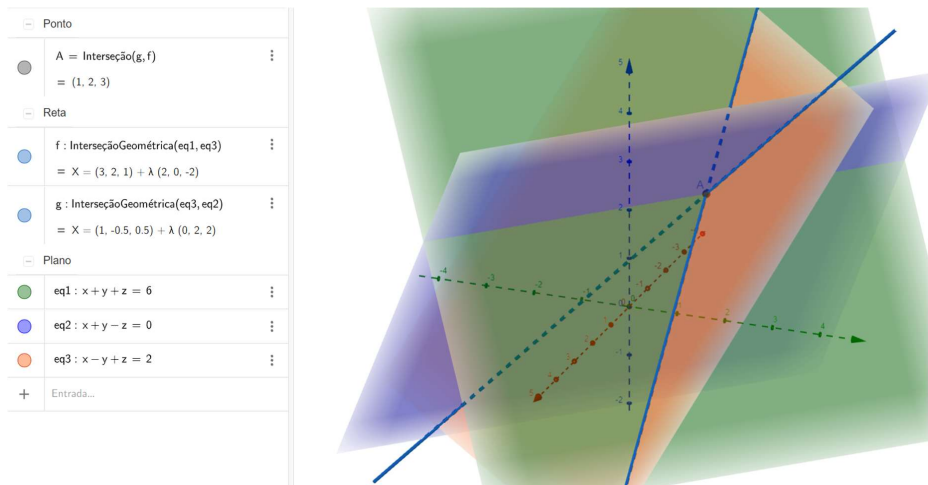
Fonte: Autor, 2023.

Segundo o método gráfico da resolução de sistemas lineares, observe a solução do sistema nas coordenadas do ponto A, de forma que  $x = 4$  e  $y = 2$ . Isso ocorre, pois, cada ponto da reta é solução da equação correspondente, logo a interseção representa a solução do sistema composto por essas equações.

Em sala de aula, no sétimo ano do ensino fundamental, também podemos utilizar esse método para auxiliar na classificação do sistema, aproveitando a interpretação geométrica decorrente da posição relativa entre duas retas no plano, concorrentes, coincidentes ou paralelas, o que implica em sistema possível determinado, sistema possível indeterminado e sistema impossível, respectivamente.

Enquanto no ensino médio, ao resolver sistema linear  $3 \times 3$ , é possível utilizar da janela de visualização 3D do Geogebra para observar os planos determinados por cada equação. Se o sistema for possível e determinado, os três planos terão apenas um ponto em comum e esse representa a solução do sistema. Vejamos a construção 3D da figura 15.

Figura 15: gráfico de equações lineares com três incógnitas.



Fonte: Autor, 2023.

1. Digite no campo de entrada as equações:  $x+y+z = 6$ ;  $x+y-z = 0$  e  $x-y+z = 2$ , uma a uma, separadas por enter;
2. Na janela de visualização 3D, utilize a ferramenta Interseção de Duas Superfícies e selecione dois dos três planos gerados, isso produzirá uma reta;

3. Refaça o passo anterior com outro par de planos, isso gerará outra reta;
4. Use Interseção de Dois Objetos e determine a interseção entre as duas retas definidas nos passos 3 e 4, ponto A;
5. Utilize a ferramenta Girar Janela de Visualização 3D para melhor visualizar o ponto A;
6. Altere as cores dos planos conforme sua preferência.

Como se tratou de um sistema possível determinado, houve um ponto comum entre os três planos, verifique na Janela de Álgebra as coordenadas desse ponto, a saber A (1,2,3), solução do sistema.

Desse modo, vimos que o Geogebra é capaz de plotar gráficos em duas ou três dimensões, assim auxiliando na resolução e classificação de sistemas lineares. Vale ressaltar, esse recurso acaba sendo muito útil para o estudo do gráfico das funções e de outras curvas.

Por exemplo, é possível parametrizar os coeficientes da função polinomial do primeiro grau segundo controles deslizantes e estudar o comportamento do gráfico conforme a variação dos coeficientes. Dessa forma, para controles deslizantes a e b, digita-se a função  $y=ax+b$ . Ao variar a, a reta mudará sua inclinação, e ao variar b, sofrerá uma translação vertical.

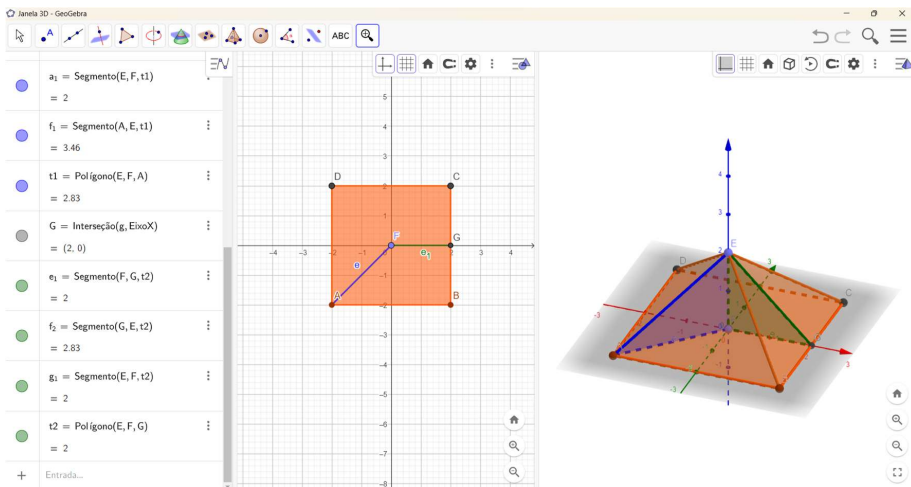
# CAPÍTULO X

## VISUALIZANDO UMA PIRÂMIDE ESPECIAL

O Geogebra também é um recurso para abrilhantar suas aulas de geometria espacial. Nessa atividade, construiremos uma pirâmide quadrangular reta, de altura medindo a metade do lado da base. Tal sólido tem a característica de compor um cubo se reunidos convenientemente em um total de seis.

Em dado momento da construção, serão exibidas três janelas no programa, conforme figura seguinte.

Figura 16: janelas do Geogebra em construção 3D.



Fonte: Autor, 2023.

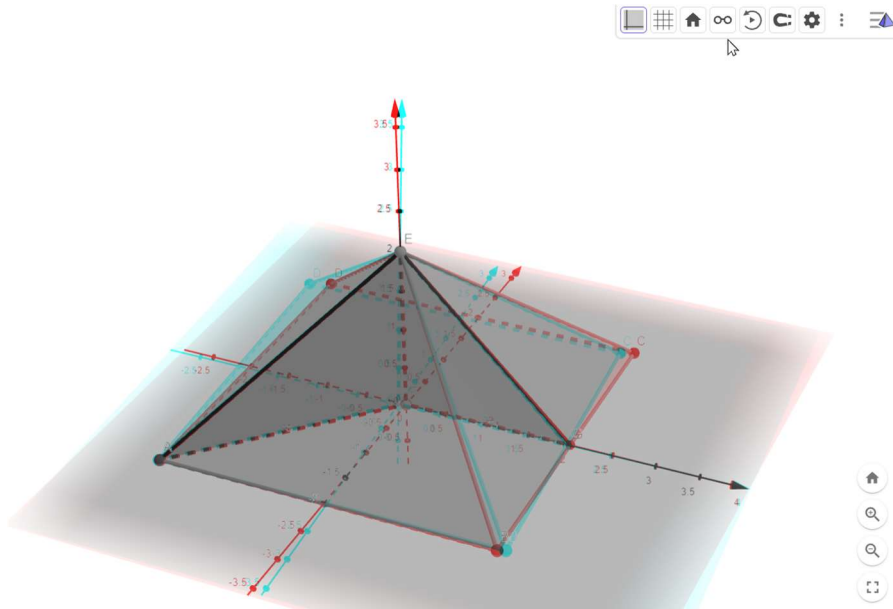
Vamos às instruções:

1. Utilize a ferramenta Polígono Regular, clique nos pontos  $(-2,-2)$  e  $(2,-2)$ , em seguida digite 4 para o número de lados;
2. Na janela de visualização 3D, com a ferramenta Ponto, crie o ponto E  $(0,0,2)$ , ponto F  $(0,0,0)$  e G  $(2,0,0)$ ;
3. Com Pirâmide, selecione o quadrado ABCD e depois o ponto E;
4. Selecione Polígono para construir os triângulos retângulos AEF e GEF;

5. Altere a cor dos triângulos para facilitar sua identificação visual. Se houver dificuldade para selecionar, em vez de clicar diretamente no triângulo, pode selecionar seu equivalente na janela de álgebra;

Em seguida, feche as demais janelas, permanecendo apenas com a Janela de Visualização 3D, nela configure a exibição como preferir, inclusive quanto ao tipo de projeção. Uma alternativa é opção para óculos 3D, possibilitando uma experiência imersiva, vide Figura 17.

Figura 17: pirâmide para óculos 3D.



Fonte: Autor, 2023.

No ensino de matemática, essa construção pode ser útil no estudo de volumes de sólidos geométricos, explorando a relação: volume da pirâmide é um sexto do volume do cubo de mesma aresta da base. Além disso, os triângulos em destaque são os dois primeiros da sequência de triângulos retângulos abordada no capítulo IV e suas dimensões, que podem ser determinadas pelo Teorema de

Pitágoras, importam na tarefa de construir a planificação da pirâmide, uma sugestão de atividade que pode ser aplicada ainda no ensino fundamental.

## REFERÊNCIAS

BARROS, R. L.; SÁ, P. F. de. NÚMEROS IRRACIONAIS NA ANTIGUIDADE GREGA CLÁSSICA. **Revista História da Matemática para Professores**, [S. l.], v. 8, n. 1, p. 1-10, 2022.

LIMA, E. L. et al. **A matemática do ensino médio**. 9. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2005. 3 v. (Coleção do professor de matemática).

Madalena, Thiago Alberto de Araújo. **O Sistema de Coordenadas Polares e sua inserção no ensino básico através de projetos**. 2014. Dissertação (PROFMAT Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2015.

MUNIZ NETO, A.C. **Tópicos de matemática elementar**. Vol. 2. Geometria Euclidiana Plana. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

ORTEGA, Regina Cássia de Souza. **Provas sem palavras: uma ponte entre a intuição e a linguagem matemática**. 2018. 122 f. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 2018.

SILVA, E. R. B. **Um cubo em seis pirâmides: aulas de Matemática**. 2015. 88f. Dissertação (PROFMAT Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2015.

SILVA, Luiz Eduardo Landim. **Desigualdades entre as médias geométrica e aritmética e de Cauchy-Schwarz**. 2013. 46 f. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) – Centro de Ciências, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2013.



## **SOBRE O AUTOR**

Licenciado em Matemática, especialista em Metodologia do Ensino de Matemática e Física, mestre em Matemática pelo Profmat/Ufal. Possui experiência no desenvolvimento de projetos de ensino, extensão e pesquisa na área de ensino de ciências e matemática, bem como docência na educação básica e na educação superior. É docente efetivo do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Alagoas na área de Matemática.



# INICIAÇÃO AO GEOGEBRA: construções para aprender e aplicar na educação básica

Esta obra foi elaborada para auxiliar quem ensina matemática e tem o desejo de incluir o Geogebra em sua prática docente. Para tanto, apresenta ferramentas desse software de geometria dinâmica a partir de construções rápidas, práticas e simples, envolvendo matemática básica, com sugestões de intervenção em sala de aula para o leitor iniciar seu aprendizado no programa vislumbrando possíveis aplicações na Educação Básica.

Ewerton Roosevelt Bernardo da Silva

RFB Editora  
Home Page: [www.rfbeditora.com](http://www.rfbeditora.com)  
Email: [adm@rfbeditora.com](mailto:adm@rfbeditora.com)  
WhatsApp: 91 98885-7730  
CNPJ: 39.242.488/0001-07  
Av. Governador José Malcher, nº 153, Sala 12,  
Nazaré, Belém-PA, CEP 66035065

