

ANÁLISE DE MODELOS

Atividades de Matemática para Sala de Aula
Ensino Médio

Volume 1

Emerson Silva de Sousa
Francisco Robson Alves da Silva

**ANÁLISE DE MODELOS: ATIVIDADES DE
MATEMÁTICA PARA SALA DE AULA
ENSINO MÉDIO**

Emerson Silva de Sousa
Francisco Robson Alves da Silva

Volume 1

ANÁLISE DE MODELOS: ATIVIDADES DE MATEMÁTICA PARA SALA DE AULA ENSINO MÉDIO

Edição 1

Belém-PA



2021

© 2021 Edição brasileira
by RFB Editora
© 2021 Texto
by Autor(es)
Todos os direitos reservados

RFB Editora
Home Page: www.rfbeditora.com
Email: adm@rfbeditora.com
WhatsApp: 91 98885-7730
CNPJ: 39.242.488/0001-07
R. dos Mundurucus, 3100, 66040-033, Belém-PA

Diagramação e design da capa

Pryscila Rosy Borges de Souza

Imagens da capa

www.canva.com

Revisão de texto

Os autores

Bibliotecária

Janaina Karina Alves Trigo Ramos

Gerente editorial

Nazareno Da Luz

<https://doi.org/10.46898/rfb.9786558891833>

Catálogo na publicação
Elaborada por Bibliotecária Janaina Ramos – CRB-8/9166

S725

Sousa, Emerson Silva de

Análise de modelos: atividades de matemática para sala de aula ensino médio /
Emerson Silva de Sousa, Francisco Robson Alves da Silva – Belém: RFB, 2021.

Livro em PDF

100 p., il.

ISBN 978-65-5889-183-3

DOI: 10.46898/rfb.9786558891833

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Ensino Médio. I. Sousa, Emerson Silva de. II.
Silva, Francisco Robson Alves da. III. Título.

CDD 510.07

Índice para catálogo sistemático

I. Matemática – Estudo e ensino



Todo o conteúdo apresentado neste livro, inclusive correção ortográfica e gramatical, é de responsabilidade do(s) autor(es).

Obra sob o selo *Creative Commons*-Atribuição 4.0 Internacional. Esta licença permite que outros distribuam, remixem, adaptem e criem a partir do trabalho, mesmo para fins comerciais, desde que lhe atribuam o devido crédito pela criação original.

Conselho Editorial

Prof. Dr. Ednilson Sergio Ramalho de Souza - UFOPA (Editor-Chefe)

Prof.^a Dr.^a. Roberta Modesto Braga-UFPA

Prof. Dr. Laecio Nobre de Macedo-UFMA

Prof. Dr. Rodolfo Maduro Almeida-UFOPA

Prof.^a Dr.^a. Ana Angelica Mathias Macedo-IFMA

Prof. Me. Francisco Robson Alves da Silva-IFPA

Prof.^a Dr.^a. Elizabeth Gomes Souza-UFPA

Prof.^a Dr.^a. Neuma Teixeira dos Santos-UFRA

Prof.^a Ma. Antônia Edna Silva dos Santos-UEPA

Prof. Dr. Carlos Erick Brito de Sousa-UFMA

Prof. Dr. Orlando José de Almeida Filho-UFSJ

Prof.^a Dr.^a. Isabella Macário Ferro Cavalcanti-UFPE

Prof. Dr. Saulo Cerqueira de Aguiar Soares-UFPI

Prof.^a Dr.^a. Welma Emidio da Silva-FIS

Comissão Científica

Prof. Dr. Laecio Nobre de Macedo-UFMA

Prof. Me. Darlan Tavares dos Santos-UFRJ

Prof. Dr. Rodolfo Maduro Almeida-UFOPA

Prof. Me. Francisco Pessoa de Paiva Júnior-IFMA

Prof.^a Dr.^a. Ana Angelica Mathias Macedo-IFMA

Prof. Me. Antonio Santana Sobrinho-IFCE

Prof.^a Dr.^a. Elizabeth Gomes Souza-UFPA

Prof. Me. Raphael Almeida Silva Soares-UNIVERSO-SG

Prof.^a Dr.^a. Andréa Krystina Vinente Guimarães-UFOPA

Prof.^a Ma. Luisa Helena Silva de Sousa-IFPA

Prof. Dr. Aldrin Vianna de Santana-UNIFAP

Prof. Me. Francisco Robson Alves da Silva-IFPA

Prof. Dr. Marcos Rogério Martins Costa-UnB

Prof. Me. Márcio Silveira Nascimento-IFAM

Prof.^a Dr.^a. Roberta Modesto Braga-UFPA

Prof. Me. Fernando Vieira da Cruz-Unicamp

Prof.^a Dr.^a. Neuma Teixeira dos Santos-UFRA

Prof. Me. Angel Pena Galvão-IFPA

Prof.^a Dr.^a. Dayse Marinho Martins-IEMA

Prof.^a Ma. Antônia Edna Silva dos Santos-UEPA

Prof.^a Dr.^a. Viviane Dal-Souto Frescura-UFSM

Prof. Dr. José Moraes Souto Filho-FIS

Prof.^a Ma. Luzia Almeida Couto-IFMT

Prof. Dr. Carlos Erick Brito de Sousa-UFMA

Prof.^a Ma. Ana Isabela Mafra-Univali

Prof. Me. Otávio Augusto de Moraes-UEMA

Prof. Dr. Antonio dos Santos Silva-UFPA
Prof^a. Dr. Renata Cristina Lopes Andrade-FURG
Prof. Dr. Daniel Tarciso Martins Pereira-UFAM
Prof^a. Dr^a. Tiffany Prokopp Hautrive-Unopar
Prof^a. Ma. Rayssa Feitoza Felix dos Santos-UFPE
Prof. Dr. Alfredo Cesar Antunes-UEPG
Prof. Dr. Vagne de Melo Oliveira-UFPE
Prof^a. Dr^a. Ilka Kassandra Pereira Belfort-Faculdade Laboro
Prof. Dr. Manoel dos Santos Costa-IEMA
Prof^a. Dr^a. Érima Maria de Amorim-UFPE
Prof. Me. Bruno Abilio da Silva Machado-FET
Prof^a. Dr^a. Laise de Holanda Cavalcanti Andrade-UFPE
Prof. Me. Saimon Lima de Britto-UFT
Prof. Dr. Orlando José de Almeida Filho-UFSJ
Prof^a. Ma. Patrícia Pato dos Santos-UEMS
Prof.^a Dr^a. Isabella Macário Ferro Cavalcanti-UFPE
Prof. Me. Alisson Junior dos Santos-UEMG
Prof. Dr. Fábio Lustosa Souza-IFMA
Prof. Me. Pedro Augusto Paula do Carmo-UNIP
Prof^a. Dr^a. Dayana Aparecida Marques de Oliveira Cruz-IFSP
Prof. Me. Alison Batista Vieira Silva Gouveia-UFG
Prof^a. Dr^a. Silvana Gonçalves Brito de Arruda-UFPE
Prof^a. Dr^a. Nairane da Silva Rosa-Leão-UFRPE
Prof^a. Ma. Adriana Barni Truccolo-UERGS
Prof. Dr. Saulo Cerqueira de Aguiar Soares-UFPI
Prof. Me. Fernando Francisco Pereira-UEM
Prof^a. Dr^a. Cátia Rezende-UNIFEV
Prof^a. Dr^a. Katiane Pereira da Silva-UFRA
Prof. Dr. Antonio Thiago Madeira Beirão-UFRA
Prof^a. Ma. Dayse Centurion da Silva-UEMS
Prof.^a Dr^a. Welma Emidio da Silva-FIS
Prof^a. Ma. Elisângela Garcia Santos Rodrigues-UFPB
Prof^a. Dr^a. Thalita Thyrsa de Almeida Santa Rosa-Unimontes
Prof^a. Dr^a. Luci Mendes de Melo Bonini-FATEC Mogi das Cruzes
Prof^a. Ma. Francisca Elidivânia de Farias Camboim-UNIFIP
Prof. Dr. Clézio dos Santos-UFRRJ
Prof^a. Ma. Catiane Raquel Sousa Fernandes-UFPI
Prof^a. Dr^a. Raquel Silvano Almeida-Unespar
Prof^a. Ma. Marta Sofia Inácio Catarino-IPBeja
Prof. Me. Ciro Carlos Antunes-Unimontes

Nossa missão é a difusão do conhecimento gerado no âmbito acadêmico por meio da organização e da publicação de livros científicos de fácil acesso, de baixo custo financeiro e de alta qualidade!

Nossa inspiração é acreditar que a ampla divulgação do conhecimento científico pode mudar para melhor o mundo em que vivemos!

Equipe RFB Editora



SUMÁRIO

ANÁLISE DE MODELOS E O ENSINO DE MATEMÁTICA	9
SUGESTÕES PRÁTICAS.....	11
CAPÍTULO 1	
CC1 - FUNÇÃO POLINOMIAL DO 1º GRAU.....	13
Situação 1.1: Esfria a cabeça! ... vai um suco natural aí?	14
Situação 1.2: Não desperdice água!.....	17
Situação 1.3: Quanto você calça?	20
Situação 1.4: Qual o melhor plano de telefonia celular?	23
Situação 1.5: Eureka! Eureka!.....	25
Situação 1.6: Racionando água no Planeta Água!	28
CAPÍTULO 2	
CC2 - FUNÇÃO POLINOMIAL DO 2º GRAU (QUADRÁTICA)	33
Situação 2.1: Basquete mágico!	34
Situação 2.2: Como construir um galinheiro e aproveitar melhor o espaço?...37	
Situação 2.3: Você já foi à praia de Alter-do-Chão?.....	40
Situação 2.4: Que tal um sorvete pra refrescar!?	43
CAPÍTULO 3	
CC3 - FUNÇÃO EXPONENCIAL	49
Situação 3.1: Cuidado com as bactérias!.....	50
Situação 3.2: Tá precisando de dinheiro emprestado?	53
Situação 3.3: Como está sua radiação hoje?	55
CAPÍTULO 4	
CC4 - LOGARITMOS	61
Situação 4.1: Crianças em crescimento!	62
Situação 4.2: Ainda tá precisando de dinheiro emprestado?	65
Situação 4.3: Voltando a falar de Radioatividade!.....	67
CAPÍTULO 5	
CC5 - TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO	73
Situação 5.1: Você conhece a serra Pira-Oca em Ater-do-Chão?	74
Situação 5.2: Santarém e o Encontro das Águas... que bela vista!	78
Situação 5.3: Acessibilidade... direito de ir e vir!	81
CAPÍTULO 6	
CC6 - SEQUÊNCIAS: GENERALIDADES (COM ETAPAS REDUZIDAS).....	87
Situação 6.1: “Adivinha” essa ... Qual o próximo número?.....	88
Situação 6.2: Futebol mágico!.....	91
Situação 6.3: Voltando a falar de bactéria!	94
REFERÊNCIAS.....	96
SOBRE OS AUTORES	97
ÍNDICE REMISSIVO.....	98



ANÁLISE DE MODELOS E O ENSINO DE MATEMÁTICA

A busca pela melhoria da qualidade do ensino de Matemática, não só no Brasil, mas em todo o mundo, tem sido alvo de muitos esforços da parte de professores, pesquisadores e especialistas da área. Como consequência prática dessa busca, temos visto nos últimos anos o surgimento de novas estratégias de ensino que, em geral, visam essa melhoria. Uma dessas estratégias é a *Modelagem Matemática* (no contexto educacional) que, no Brasil, já é conhecida a mais de três décadas.

Com a finalidade de auxiliar o professor na tarefa de tornar a Matemática escolar mais significativa e motivadora à aprendizagem do estudante, a Modelagem Matemática se apresenta como estratégia de ensino que oportuniza uma interação mais próxima da Matemática com a realidade do estudante, possibilitando que ele consiga relacionar os conteúdos estudados em sala de aula com as situações reais de seu cotidiano e de seu interesse.

Alguns questionamentos, no entanto, têm sido levantados: Como implementar a Modelagem na prática em sala de aula? Quanto tempo deve durar uma atividade de Modelagem? Como lidar com os conteúdos curriculares em atividade de Modelagem? Quem deve ser o responsável por definir os problemas (professor ou estudantes)? Esses e outros, têm sido os questionamentos recorrentes entre professores que se propõem e ousam transpor a barreira do ensino tradicional em favor de uma opção pedagógica mais criativa e motivadora.

Essas dúvidas, no entanto, apontam alguns obstáculos que podem dificultar a implementação da Modelagem como estratégia regular de ensino, principalmente na Educação Básica. Bassanezi (2002) destaca como principais dificuldades nessa implementação, os seguintes obstáculos: pouco tempo para realizar as atividades; o cumprimento do conteúdo curricular em geral fica comprometido; insegurança do professor na implementação, seja por falta de conhecimento do processo ou por medo de se deparar com situações embaraçosas quanto às aplicações de matemática em áreas que desconhece; etc.

Diante desses obstáculos, felizmente, vários modos de implementar/incentivar a Modelagem em sala de aula têm sido propostos na tentativa de possibilitar uma melhoria na qualidade, tanto do ensino como da aprendizagem de Matemática na escola, além de oportunizar mais interação entre professores e estudantes envolvidos no processo. Um desses modos de implementar/incentivar a Modelagem em sala de aula é a *Análise de Modelos* (AnM). Indicada, a princípio para o ensino

superior, como uma abordagem pedagógica que faz uso de modelos matemáticos já existentes para introduzir um conteúdo novo (SOARES, 2012, 2015; SOARES; JAVARONI, 2013), a AnM passa a ser concebida como um método de ensino de Matemática na Educação Básica (SOUSA, 2019).

Para Sousa (2019), a AnM, nessa perspectiva e nível de ensino, agrega basicamente três princípios essenciais que a caracterizam e servem como direcionamento no desenvolvimento prático das aulas. São eles:

- 1 - *O uso de modelos matemáticos prontos;*
- 2 - *O uso de situações e/ou problemas da realidade;*
- 3 - *O desenvolvimento do conteúdo curricular (e não curricular).*

De acordo com o autor, isso ocorre porque a AnM potencializa o uso de modelos matemáticos em variados contextos, em situações-problema interessantes para os estudantes, além de oportunizar um modo mais seguro de inicialização, pelo professor, no trabalho com Modelagem em sala de aula sem, contudo, se distanciar da estrutura escolar vigente, principalmente no que diz respeito ao cumprimento do conteúdo curricular programático.

Nessa perspectiva, portanto, a AnM é um método de ensino na Educação Básica que procura desenvolver o conteúdo curricular ao mesmo tempo que trata/discute de situações-problema da realidade, seja do cotidiano, seja de outras áreas do conhecimento.

SUGESTÕES PRÁTICAS

A fim de contribuir para a prática do professor de Matemática, tanto no planejamento como na execução desse método de ensino (AnM), é apresentado a seguir o desenvolvimento prático de alguns conteúdos específicos do Ensino Médio, cuja execução é sugerida em quatro etapas: 1ª) *Apresentação das situações-problema*; 2ª) *Exploração e interpretação*; 3ª) *Desenvolvimento do conteúdo curricular e Resolução*; 4ª) *Aplicação*.

A 1ª etapa do método AnM visa a compreensão das situações-problema dentro do contexto apresentado e destaca a presença de modelos matemáticos nesse contexto. Nessa etapa, após e/ou durante a apresentação das situações-problema, em diálogo com os estudantes, o professor pode incentivá-los a elencar as variáveis envolvidas (**Identificando Variáveis**). Aqui também é oportunizada aos estudantes uma retomada inicial de conhecimentos prévios, tanto de conteúdo curricular como de conteúdo não curricular.

A 2ª etapa do método objetiva levar os estudantes a relacionar e interpretar os modelos matemáticos dentro do contexto apresentado, de modo que possam compreender o significado das variáveis elencadas. Nessa etapa, em conjunto com os estudantes, além do levantamento e elaboração de problemas (**Possíveis questões**), o professor também pode propor as primeiras atividades a serem realizadas pelos estudantes (**Tarefa 1: Ações Exploratórias**). O objetivo aqui é tentar envolvê-los na exploração da situação em estudo e do(s) respectivo(s) modelo(s), além de preparar o “ambiente” para a 3ª etapa.

A 3ª etapa se refere à resolução de questões levantadas (**Tarefa 2: Ações Exploratórias**), ao mesmo tempo que se desenvolve o novo conteúdo curricular necessário para dar conta destas e de outras questões que por ventura surjam. Esse conteúdo deve ser desenvolvido de modo autônomo pelo professor, que pode ser iniciado a partir de discussões envolvendo os modelos matemáticos relacionados à situação apresentada (**Sugestão de Discussões**).

Por fim, a 4ª etapa visa aplicar os modelos discutidos, tanto no contexto das situações propostas inicialmente como na resolução de novos problemas, em outros contextos. Nessa etapa são sugeridas algumas questões relativas ao conteúdo curricular estudado (**Questões de Aplicação**). Nessas questões, os modelos matemáticos estudados têm papel central em sua resolução e interpretação, oportunizando, de modo geral, a consolidação do conteúdo matemático introduzido, agora aprofundado e ampliado.

No presente livro (e-book), os conteúdos escolhidos se referem ao 1º ano do Ensino Médio. Ressalta-se, porém, que os temas discutidos aqui são muito mais amplos. Não se esgotam apenas com o que é apresentado e nem as situações e modelos selecionados são os únicos que podem ser considerados. Dependendo do objetivo do professor, outras situações e outros modelos podem ser escolhidos. Além disso, na exploração dos modelos, muitas outras questões podem surgir no decorrer da prática em sala de aula que, certamente, enriqueceriam ainda mais as aulas.



CAPÍTULO 1

CC1 - FUNÇÃO POLINOMIAL DO 1º GRAU

Situação 1.1: Esfria a cabeça! ... vai um suco natural aí?

1ª Etapa: Apresentação da situação-problema

Você gosta de suco de frutas? Qual o seu preferido? A barraca “Frutas do Norte”, em Alter-do-Chão (Santarém-PA), além de variadas comidas regionais, vende sucos naturais ao preço de R\$3,50 o copo. Para facilitar seu trabalho, o proprietário montou um quadro explicativo, conforme a ilustração abaixo:

Modelo 1

Número de copos	Preço (R\$)
1	3,50
2	7,00
3	10,50
4	14,00
5	17,50
6	21,00
7	24,50
8	28,00
9	31,50
10	35,00

Fonte: Iezzi et al. (2016a, p. 39).

Identificando Variáveis a partir da Situação 1.1

- O quadro acima (Modelo 1) indica uma **função** que relaciona duas grandezas. Quais essas grandezas?
- Que variáveis você poderia utilizar para representar essas grandezas?

2ª Etapa: Exploração e interpretação

Possíveis questões/problemas a partir da Situação 1.1

- Como seria a representação *geométrica* dessa **função** (Modelo 1)?
- Como seria a representação *algébrica* dessa **função** (Modelo 1)?
- Que vantagem você percebe em cada uma das representações (quadro, geométrica e algébrica)? Por quê?
- Se o preço do copo de suco aumentasse em 20%, como ficaria um novo quadro explicativo?
- Como seria a representação *geométrica* da nova função?
- Como seria a representação *algébrica* da nova função?
- etc.

Sugestão de primeiras Ações Exploratórias ...

Tarefa 1: Ações Exploratórias a partir da **Situação 1.1**

- 1) Represente a função (Modelo 1) na forma *geométrica* (Plano Cartesiano)
 - a) Se ligarmos os pontos indicados nesse plano, qual a forma do gráfico?
 - b) O que isso significa?
- 2) Com base no quadro apresentado (Modelo 1), tente responder as perguntas:
 - a) Qual o preço de 12 copos desse suco?
 - b) Qual o preço de 20 copos desse suco?
 - c) Qual o preço de 34 copos desse suco?
 - d) Somente em suco, um grupo de amigos que visitou Alter-do-Chão nesse domingo, gastou R\$ 164,50. Quantos copos de suco esse grupo tomou?
 - e) Ao final desse domingo, o dono da barraca “Frutas do Norte” havia arrecadado R\$ 885,50 somente com a venda de suco. Quantos copos ele vendeu?
- 3) Considerando que o preço a pagar por x copos de suco seja y reais, como seria uma fórmula $y = f(x)$ (representação *algébrica*) que represente essa relação? etc.

3ª Etapa: Desenvolvimento do conteúdo curricular e Resolução

Sugestão de Discussões em torno da **Situação 1.1**

- Oportunizar aos estudantes que apresentem as estratégias de desenvolvimento da tarefa (Tarefa 1).
- Discutir as facilidades e dificuldades na realização da tarefa (Tarefa 1).
- Questionar o que caracteriza esse tipo de função e qual sua forma geométrica e algébrica geral.
- Evidenciar a necessidade do novo conteúdo.

Nesse momento, o professor tem autonomia para desenvolver, em diálogo com os estudantes, o **conteúdo curricular** que evidencie o modelo geral em estudo e dê conta dos questionamentos levantados. Além disso, outras situações que se utilizam do modelo geral apresentado, podem ser evidenciadas e discutidas no grupo.

Sugestão de outras Ações Exploratórias ...

Tarefa 2: Ações Exploratórias a partir da Situação 1.1

- 1) Se o preço do copo de suco, antes R\$ 3,50, aumentar a partir dessa semana em 20%, como ficaria a tabela (Modelo 1) com os novos valores?
- 2) Como seria a representação *geométrica* (Plano Cartesiano) dessa nova função?
- 3) Ligue os pontos indicados nesse plano e compare o gráfico dessa nova função com o gráfico construído a partir do Modelo 1 (item 1 da Tarefa 1). O que você percebe de semelhante e de diferente entre eles?
- 4) Como base no conteúdo estudado até agora e, considerando que o preço a pagar por x copos de suco seja y reais, como seria uma fórmula $y = f(x)$ (representação *algébrica*) que represente essa relação?
- 5) Baseado nesse modelo algébrico (item anterior), responda novamente as questões:
 - a) Qual o preço de 12 copos desse suco?
 - b) Qual o preço de 20 copos desse suco?
 - c) Qual o preço de 34 copos desse suco?
 - d) Somente em suco, um grupo de amigos que visitou Alter-do-Chão nesse domingo, gastou R\$ 164,50. Quantos copos de suco esse grupo tomou?
 - e) Ao final desse domingo, o dono da barraca “Frutas do Norte” havia arrecadado R\$ 885,50 somente com a venda de suco. Quantos copos ele vendeu?
- 6) Como seria a representação algébrica $y = f(x)$ da nova função (item 2)?
 - a) A partir desse modelo, que indica o novo preço do copo de suco, uma arrecadação de R\$ 730,80 equivale a quantos copos de suco vendidos?
 - b) Com esse modelo, se o dono da barraca “Frutas do Norte” vender, no próximo domingo, a mesma quantidade de suco do domingo passado, quanto conseguirá arrecadar? etc.

4ª Etapa: Aplicação

Questões de Aplicação são sugeridas no final da seção.

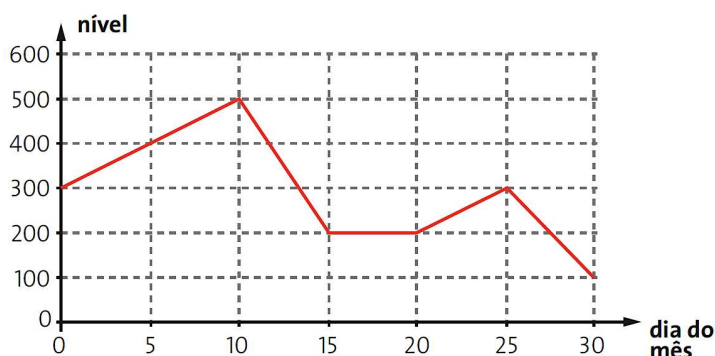
Situação 1.2: Não desperdice água!

1ª Etapa: Apresentação da situação-problema

É sempre bom lembrar que sem água não haveria vida em nosso planeta. Ela é de extrema importância para a vida de todos os seres vivos que habitam a Terra. Embora este recurso seja encontrado em abundância em nosso planeta (cerca de 70% da superfície é composta por água), somente 4% da água é doce, ou seja, própria para o consumo. Levando em conta que a população mundial atual passa de sete bilhões de habitantes e continua crescendo, é de fundamental importância que o ser humano busque maneiras de usar a água de modo mais racional e inteligente. Portanto, economizar água para que não falte no futuro é o grande desafio ambiental no presente milênio¹.

Pensando nesse uso racional da água, algumas comunidades em geral utilizam um reservatório central para distribuir água à população, durante apenas um certo período de tempo por dia (durante uma hora, por exemplo). O gráfico abaixo mostra o nível de água (em *cm*) no reservatório de uma dessas comunidades, localizada próxima à Santarém-PA.

Modelo 2



Fonte: Dante (2016a, p. 71).

Identificando Variáveis a partir da Situação 1.2

- O gráfico acima (Modelo 2) indica uma **função** que relaciona duas grandezas. Quais essas grandezas?
- Que variável você poderia utilizar para representar essas grandezas?

¹ Disponível em: <https://biomania.com.br/artigo/importancia-da-agua-para-os-seres-humanos>. Acesso em: 20 jul. 2020.

2ª Etapa: Exploração e interpretação

Possíveis questões/problemas a partir da Situação 1.2

- De acordo como o gráfico (Modelo 2), em quanto tempo foi observado e registrado o nível da água do reservatório? (Qual a variação do tempo de observação?)
- Qual a variação do nível da água do reservatório nesse intervalo de tempo?
- Como interpretar a parte do gráfico nos 10 primeiros dias de observação?
- Como interpretar a parte do gráfico entre os dias 10 e 15?
- Como interpretar a parte do gráfico entre os dias 15 e 20?
- O que significa a *taxa média de variação* do nível da água do reservatório no decorrer do tempo de observação?
- É possível expressar essa função (Modelo 2) na forma *algébrica*? Etc.

Sugestão de primeiras Ações Exploratórias ...

Tarefa 1: Ações Exploratórias a partir da Situação 1.2

- 1) Durante quanto tempo foi observado e registrado o nível da água do reservatório? (Queremos saber o *Domínio* da função).
- 2) Qual a variação do nível da água do reservatório nesse tempo de observação? (Queremos saber a *Imagem* da função).
- 3) Como você interpreta a parte do gráfico (Modelo 2):
 - a) Nos 10 primeiros dias de observação?
 - b) Entre os dias 10 a 15, e entre os dias 15 a 20?
- 4) Como você define a *taxa média de variação* do nível da água do reservatório no decorrer do tempo de observação? Como calcular essa taxa?
- 5) Qual a *taxa média de variação* do nível da água do reservatório:
 - a) Durante todo o período de observação?
 - b) Durante os 10 primeiros dias? E durante os 5 últimos dias?
 - c) Durante os dias 10 a 15, 15 a 35? **etc.**

3ª Etapa: Desenvolvimento do conteúdo curricular e Resolução

Sugestão de Discussões em torno da Situação 1.2

- Oportunizar aos estudantes que apresentem as estratégias de desenvolvimento da tarefa (Tarefa 1).
- Discutir as facilidades e dificuldades na realização da tarefa (Tarefa 1).
- Questionar o que caracteriza cada parte desse tipo de função e qual sua forma algébrica geral.
- Evidenciar a necessidade do novo conteúdo.

Nesse momento, o professor tem autonomia para desenvolver, em diálogo com os estudantes, o **conteúdo curricular** que evidencie o modelo geral em estudo e dê conta dos questionamentos levantados. Além disso, outras situações que se utilizam do modelo geral apresentado, podem ser evidenciadas e discutidas no grupo.

Sugestão de outras Ações Exploratórias ...

Tarefa 2: Ações Exploratórias a partir da **Situação 1.2**

- 1) Qual a forma *algébrica* da função (Modelo 2) nos seguintes intervalos:
 - a) Durante os 10 primeiros dias? Durante os 5 últimos dias?
 - b) Durante os dias 10 a 15, 15 a 20 e 20 a 25?
- 2) A partir dessas expressões, como seria a representação da forma *algébrica* da função (Modelo 2) como um todo? Etc.

4ª Etapa: Aplicação

Questões de Aplicação são sugeridas no final da seção.

Situação 1.3: Quanto você calça?

1ª Etapa: Apresentação da situação-problema

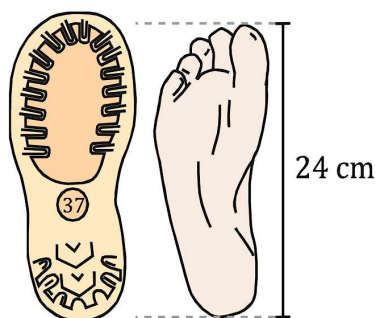
Em geral, a numeração usada na confecção de sapatos depende do comprimento do pé das pessoas. Você sabe como faz o cálculo para determinar o número do sapato em função do tamanho do pé? Os fabricantes de calçados brasileiros em geral usam:

Modelo 3

$$N = \frac{5c + 28}{4}$$

onde c representa o comprimento do pé (em cm) e N , o número do calçado.

Figura 1: Tamanho de um pé e o número do sapato correspondente



Fonte: Smole e Diniz (2016a, p. 76).

Identificando Variáveis a partir da Situação 1.3

- A fórmula acima (Modelo 3) indica uma **função** que relaciona duas grandezas. Quais essas grandezas?
- Que variável representa cada uma dessas grandezas?

2ª Etapa: Exploração e interpretação

Possíveis questões/problemas a partir da Situação 1.3

- A Figura 1 acima mostra o desenho de um sapato com numeração 37 e o pé correspondente, 24 cm . Esses valores dão certo na fórmula (Modelo 3)?
- E pra você, dá certo a fórmula (Modelo 3)?
- Num sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, como seria a representação gráfica dessa fórmula (Modelo 3)?
- Pessoas que calçam uma mesma numeração de sapato, significa que elas têm o mesmo comprimento do pé? Como justificar?
- Essa fórmula (Modelo 3) é a única maneira de calcular a numeração do calçado em função do comprimento do pé? Como encontrar essa (ou outra) fórmula? etc.

Sugestão de primeiras Ações Exploratórias ...

Tarefa 1: Ações exploratórias a partir da **Situação 1.3**

- 1) Quanto você calça? (Expresse o número real N do seu calçado).
- 2) Com uma régua, faça a medição do comprimento c de seu pé e registre.
- 3) Faça uma tabela contendo pares de números (c, N) fornecidos por seus colegas.
- 4) Represente graficamente (plano cartesiano) os dados da tabela e ligue os pontos.
- 5) Pessoas que calçam um mesmo número de sapato, têm sempre o mesmo comprimento do pé? Explique. etc.

3ª Etapa: Desenvolvimento do conteúdo curricular e Resolução

Sugestão de Discussões em torno da **Situação 1.3**

- Oportunizar aos estudantes que apresentem as estratégias de desenvolvimento da tarefa (Tarefa 1).
- Discutir as facilidades e dificuldades na realização da tarefa (Tarefa 1).
- Questionar o que caracteriza esse tipo de função e qual sua forma geométrica e algébrica geral.
- Evidenciar a necessidade do novo conteúdo.

Nesse momento, o professor tem autonomia para desenvolver, em diálogo com os estudantes, o **conteúdo curricular** que evidencie o modelo geral em estudo e dê conta dos questionamentos levantados. Além disso, outras situações que se utilizam do modelo geral apresentado, podem ser evidenciadas e discutidas no grupo.

Sugestão de outras Ações Exploratórias ...

Tarefa 2: Ações Exploratórias a partir da Situação 1.3

- 1) De acordo com a Figura 1, um pé de comprimento 24 *cm* corresponde a um sapato de numeração 37. Esses valores dão certo na fórmula (Modelo 3)? Justifique.
- 2) Verifique se os valores *c* e *N* do seu próprio pé dão certo na fórmula (Modelo 3).
 - a) Pela fórmula, qual deveria ser o valor de *N* (**exato**) do seu calçado?
 - b) Qual o valor real (**arredondado**) do calçado?
- 3) Se duas pessoas calçam 43, qual a possibilidade do comprimento de seus pés?
- 4) Repita a questão anterior, considerado a numeração do seu próprio calçado.
- 5) Em uma planilha (Excel), utilize os dados da tabela (questão 3 da Tarefa 1) para expressar um gráfico de dispersão que represente a numeração do calçado em função do comprimento do pé da sua turma. Exiba a fórmula referente a esses dados.
 - a) Ao comparar essa fórmula com o Modelo 3, que similaridades e diferenças você percebe? (Descreva suas percepções).
 - b) As duas fórmulas podem ser utilizadas para calcular a numeração de um calçado em função do comprimento do pé da pessoa. Para um determinado comprimento do pé, as duas fórmulas resultam a mesma numeração? Exemplifique. Por que isso acontece? Etc.

4ª Etapa: Aplicação

Questões de Aplicação são sugeridas no final da seção.

Situação 1.4: Qual o melhor plano de telefonia celular?

1ª Etapa: Apresentação da situação-problema

Você tem celular? Que plano você usa? Há bem pouco tempo atrás, os serviços de telefonia celular eram voltados, essencialmente, para fazer ligações. Os planos, além de terem um custo fixo, pagava-se também um valor pelo tempo de uso em ligação (em minutos). Para exemplificar essa situação, é apresentado na tabela a seguir, três desses planos:

Modelo 4		
Plano	Custo fixo mensal	Custo adicional por minuto
A	R\$ 35,00	R\$ 0,50
B	R\$ 20,00	R\$ 0,80
C	0	R\$ 1,20

Fonte: Dante (2016a, p. 89).

Identificando Variáveis a partir da Situação 1.4

- A tabela acima (Modelo 4) indica, em cada plano, duas grandezas. Quais são elas?
- Que variáveis você indicaria para representar essas grandezas?
- O custo total a ser pago em cada um desses planos expressa uma terceira grandeza que depende (é função) das outras duas. Que variável você indicaria para representar essa grandeza?

2ª Etapa: Exploração e interpretação

Possíveis questões/problemas a partir da Situação 1.4

- Como seria uma fórmula do custo total a ser pago em cada plano (Modelo 4)?
- Que representação gráfica tem essas funções? O que isso significa?
- Em que condições cada um dos planos é mais vantajoso para o usuário? etc.

Sugestão de primeiras Ações Exploratórias ...

Tarefa 1: Ações exploratórias a partir da Situação 1.4

- 1) Que valor deve ser pago em cada plano de telefonia celular nos casos em que um consumidor utiliza mensalmente 15 min, 24 min, 34 min, 45 min, 60 min e 72 min?
- 2) Qual plano é mais vantajoso para um consumidor que utiliza 34 minutos de ligação por mês? Explique.
- 3) Qual plano é mais vantajoso para um consumidor que utiliza 72 minutos de ligação por mês? Explique.
- 4) O custo total a ser pago em cada um desses planos (A, B e C) poderia ser representado, respectivamente, pelas variáveis y_A , y_B e y_C . Se o consumo mensal (em minutos) for indicado por x , como você representaria uma fórmula desse custo (representação *algébrica*) para cada plano? Etc.

3ª Etapa: Desenvolvimento do conteúdo curricular e Resolução**Sugestão de Discussões em torno da Situação 1.4**

- Oportunizar aos estudantes que apresentem as estratégias de desenvolvimento da tarefa (Tarefa 1).
- Discutir as facilidades e dificuldades na realização da tarefa (Tarefa 1).
- Questionar o que caracteriza esse tipo de função e qual a sua forma geométrica e algébrica geral.
- Evidenciar a necessidade do novo conteúdo.

Nesse momento, o professor tem autonomia para desenvolver, em diálogo com os estudantes, o **conteúdo curricular** que evidencie o modelo geral em estudo e dê conta dos questionamentos levantados. Além disso, outras situações que se utilizam do modelo geral apresentado, podem ser evidenciadas e discutidas no grupo.

Sugestão de outras Ações Exploratórias ...**Tarefa 2: Ações Exploratórias a partir da Situação 1.4**

- 1) De acordo com o que já estudamos, o custo total a ser pago em cada um dos planos de telefonia celular (A, B e C) pode ser expresso por uma função $y = f(x)$ do 1º grau, do tipo $y = mx + n$ (questão 4 da Tarefa 1). O que significa o valor de m ?
- 2) Em que condição cada plano (A, B e C) é mais vantajoso para o usuário? Explique.
- 3) Sabe-se que o gráfico desse tipo de função é representado por uma reta. Represente graficamente cada uma das funções (questão 4 da Tarefa 1) em um único plano cartesiano (**Sugestão:** Encontre os pontos onde as funções cortam os eixos Ox e Oy). Em termos gráficos, o que indicam os valores de m e n ? etc.

4ª Etapa: Aplicação

Questões de Aplicação são sugeridas no final da seção.

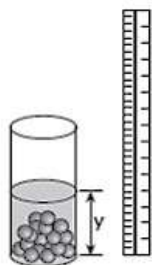
Situação 1.5: Eureka! Eureka!

1ª Etapa: Apresentação da situação-problema

Você sabe o que significa essa expressão? Sabe quem saiu gritando essa expressão pelas ruas da cidade? Essa é uma famosa exclamação atribuída ao matemático e cientista grego Arquimedes de Siracusa (287 a.C. – 212 a.C.), quando descobriu como resolver um complexo problema apresentado pelo rei Hierão. Em síntese, o rei queria saber o volume de ouro em sua coroa e Arquimedes teria que medir esse volume sem a derreter. A descoberta da solução do problema ocorreu quando Arquimedes entrou numa banheira com água e observou que o nível da água subia quando ele entrava. Concluiu então que para medir o volume da coroa bastava mergulhar a coroa em água e calcular o volume de água deslocado, que deveria ser equivalente. Ao perceber a descoberta, conta-se que ele saiu nu, correndo pelas ruas da cidade e gritando eufórico: “Eureka! Eureka!”, que em grego significa “Achei! Achei!”. Essa grande descoberta ficou conhecida como *Princípio de Arquimedes*.² (Pesquise mais³).

Para ilustrar esse princípio, foi realizado o seguinte experimento: Colocou-se certa quantidade de bolinhas de vidro idênticas em um copo cilíndrico com água até certo nível e mediu-se o nível da água, conforme ilustrado na figura a seguir, onde é indicado alguns resultados do experimento.

Modelo 5



número de bolas (x)	nível da água (y)
5	6,35 cm
10	6,70 cm
15	7,05 cm

Fonte: ENEM 2009 – Q. 159 (prova azul).

Identificando Variáveis a partir da Situação 1.5

- A tabela acima (Modelo 5) indica a relação entre duas grandezas. Quais são elas?
- Que variáveis podem representar essas grandezas?

² Disponível em: [https://pt.wikipedia.org/wiki/Eureka_\(exclama%C3%A7%C3%A3o\)#::~:~:text=Eureka!%2C%20Eureka!%2C%20Heureka,\(287%E2%80%93212%20a.C.\).](https://pt.wikipedia.org/wiki/Eureka_(exclama%C3%A7%C3%A3o)#::~:~:text=Eureka!%2C%20Eureka!%2C%20Heureka,(287%E2%80%93212%20a.C.).) Acesso em: 7 ago. 2020.
³ Disponível em: <https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/a-descoberta-arquimedes.htm>. Acesso em: 7 ago. 2020.

2ª Etapa: Exploração e interpretação

Possíveis questões/problemas a partir da Situação 1.5

- Variando uniformemente o número de bolinhas de vidro dentro do copo, a variação do nível da água também é uniforme? O que isso significa?
- O nível da água y depende (está em função) do número de bolas x colocadas dentro do copo. Que forma gráfica indica essa função (representação geométrica)?
- Como seria uma fórmula $y = f(x)$ para esse fenômeno (representação algébrica)?

Sugestão de primeiras Ações Exploratórias ...

Tarefa 1: Ações exploratórias a partir da Situação 1.5

- 1) Observando a tabela (Modelo 5), ao variar o número de bolinhas de vidro dentro do copo de 5 para 10 e, de 10 para 15, quais as variações correspondentes do nível da água? O que você percebe?
- 2) Se forem colocadas mais cinco bolinhas dentro do copo (passa a ter 20 bolinhas), qual será o nível da água? Por quê?
- 3) Se forem colocadas mais outras dez bolinhas dentro do copo, passando a ter 30 bolinhas, qual será o nível da água? Por quê?
- 4) Represente esses pontos em um sistema de coordenadas (Plano Cartesiano). Que tipo de gráfico você acha que pode ser formado quando se liga esses pontos? Etc.

3ª Etapa: Desenvolvimento do conteúdo curricular e Resolução

Sugestão de Discussões em torno da Situação 1.5

- Oportunizar aos estudantes que apresentem as estratégias de desenvolvimento da tarefa (Tarefa 1).
- Discutir as facilidades e dificuldades na realização da tarefa (Tarefa 1).
- Questionar o que caracteriza esse tipo de função e qual sua forma geométrica e algébrica geral.
- Evidenciar a necessidade do novo conteúdo.

Nesse momento, o professor tem autonomia para desenvolver, em diálogo com os estudantes, o **conteúdo curricular** que evidencie o modelo geral em estudo e dê conta dos questionamentos levantados. Além disso, outras situações que se utilizam do modelo geral apresentado, podem ser evidenciadas e discutidas no grupo.

Sugestão de outras Ações Exploratórias ...

Tarefa 2: Ações Exploratórias a partir da Situação 1.5

- 1) De acordo com o que foi estudado, o Modelo 5 pode ser representado por uma fórmula do tipo $y = mx + n$ (função do 1º grau). Por que podemos concluir isso? Explique.
- 2) Expresse essa fórmula (Modelo 3) e responda os itens:
 - a) Usando a fórmula, qual o nível da água quando tem 20, 23 e 34 bolinhas dentro do copo?
 - b) Usando a fórmula, qual o nível da água quando não tem nenhuma bolinha dentro do copo? O que isso significa?
 - c) O que representa o valor de m nessa fórmula?
 - d) O que representa o valor de n nessa fórmula?
- 3) Assim como fez Arquimedes para calcular o volume da coroa do rei Hierão, você pode calcular, por exemplo, o volume das bolinhas do experimento apresentado. Como você faria isso? (Descreva um modo de fazer esse cálculo). Que informações precisamos ter para poder calcular esse volume? Explique. Etc.

4ª Etapa: Aplicação

Questões de Aplicação são sugeridas no final da seção.

Situação 1.6: Racionando água no Planeta Água!

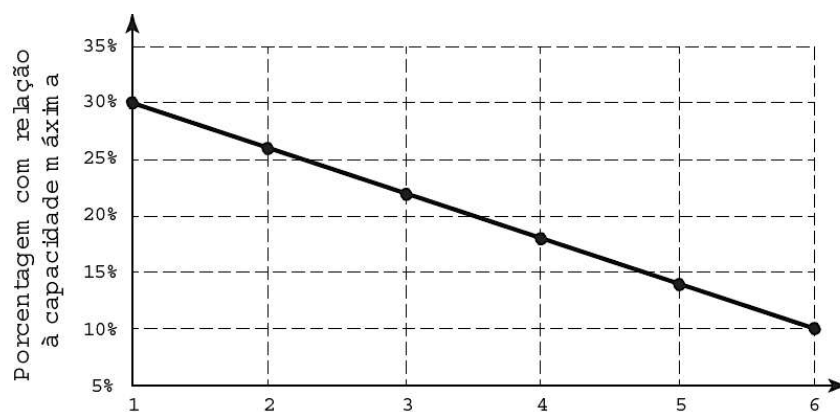
1ª Etapa: Apresentação da situação-problema

A Terra é às vezes chamada *Planeta Água* (música de Guilherme Arantes). Isso é devido a quantidade enorme de água encontrada em nosso planeta (cerca de 70% da superfície é composta por água). Porém, como já vimos em outro momento (Situação 1.2), somente 4% da água é doce, ou seja, própria para o consumo. Por isso, é de fundamental importância que o ser humano busque maneiras de usar a água de modo mais racional e inteligente para que não falte no futuro. Um dos grandes desafios do Brasil é o gerenciamento dos seus recursos naturais, sobretudo os recursos hídricos. Existe uma demanda crescente por água e o risco de racionamento é um fantasma que nos assusta cada vez mais.

Essa já tem sido uma triste realidade em algumas regiões brasileiras. É o caso do Paraná que teve, no período 2019/2020, uma forte estiagem que comprometeu o abastecimento de água para a população. Por causa disso, no dia 7 de maio de 2020, o governador do Paraná decretou situação de emergência hídrica, pelo prazo de 180 dias. O decreto permitiu oficialmente que as companhias de abastecimento de água realizassem rodízios de até 24 horas, podendo extrapolar esse prazo em situações emergenciais.⁴

Em uma das cidades atingidas nesse estado, o nível da água de um reservatório (medido em porcentagem, um mês após o decreto) foi monitorado durante o racionamento (seis meses), cuja tendência de esvaziamento está mostrada no gráfico:

Modelo 6



Fonte: ENEM 2016 – Q. 158 (prova azul).

⁴ Disponível em: <http://www.sbcsul.com.br/noticias/conteudo/estiagem-de-dez-meses-no-parana-e-sanepar-alerta-para-racionamento-de-agua/64319>. Acesso em: 10 ago. 2020.

Identificando Variáveis a partir da Situação 1.6

- O gráfico acima (Modelo 6) indica a relação entre duas grandezas. Quais são elas?
- Que variáveis você indicaria pra representar essas grandezas?

2ª Etapa: Exploração e interpretação**Possíveis questões/problemas a partir da Situação 1.6**

- De acordo com o gráfico (Modelo 6), percebe-se que a tendência de esvaziamento do reservatório de água é “linear”. O que isso significa?
- Variando uniformemente o intervalo de tempo de observação, a variação do nível da água no reservatório também é uniforme? O que isso significa?
- O gráfico acima (Modelo 6) representa uma função do nível de água (y) no reservatório em relação ao tempo (x) de observação. Como seria uma fórmula (representação algébrica) para esse fenômeno? Etc.

Sugestão de primeiras Ações Exploratórias ...**Tarefa 1: Ações exploratórias a partir da Situação 1.6**

- 1) Com base no gráfico (Modelo 6), o nível de água do reservatório está diminuindo. Qual esse nível de água no primeiro mês de observação? E no terceiro? E no sexto?
- 2) De acordo com o gráfico (Modelo 6):
 - a) Ao variar o tempo de observação do primeiro para o segundo mês, e do segundo para o terceiro, quais as variações correspondentes do nível de água?
 - b) E se variar o tempo de observação do segundo para o quarto mês, e do quarto para o sexto, quais as variações correspondentes do nível de água?
 - c) E se variar o tempo de observação do primeiro para o terceiro mês, e do terceiro para o sexto, quais as variações correspondentes do nível de água?
 - d) Note que as variações de tempo em cada item anterior são uniformes. O que ocorre com as variações do nível de água em cada um desses itens? O que isso significa?
 - e) Com base nessas informações, o que você conclui sobre a *taxa média de variação* do nível da água no reservatório em relação ao tempo de observação? (É constante ou variável?). Explique. Etc.

3ª Etapa: Desenvolvimento do conteúdo curricular e Resolução**Sugestão de Discussões em torno da Situação 1.6**

- Oportunizar aos estudantes que apresentem as estratégias de desenvolvimento da tarefa (Tarefa 1).
- Discutir as facilidades e dificuldades na realização da tarefa (Tarefa 1).
- Questionar o que caracteriza esse tipo de função e qual a forma geométrica geral.
- Evidenciar a necessidade do novo conteúdo.

Nesse momento, o professor tem autonomia para desenvolver, em diálogo com os estudantes, o **conteúdo curricular** que evidencie o modelo geral em estudo e dê conta dos questionamentos levantados. Além disso, outras situações que se utilizam do modelo geral apresentado, podem ser evidenciadas e discutidas no grupo.

Sugestão de outras Ações Exploratórias ...

Tarefa 2: Ações Exploratórias a partir da Situação 1.6

1) Como vimos, o gráfico apresentado (Modelo 6) representa uma função do 1º grau do tipo $y = mx + n$, sendo y o nível de água no reservatório e x o tempo de observação. Responda:

- Qual o valor de m ? O que esse valor representa?
- Usando a equação da reta $y - y_0 = m(x - x_0)$, como é a fórmula $y = mx + n$ para o fenômeno estudado (nível da água em função do tempo)?

2) O gráfico apresentado (Modelo 6) indica o nível de água no reservatório apenas no período de seis meses (período do racionamento). Se a tendência de esvaziamento do reservatório continuasse por mais tempo, em que mês o reservatório estaria totalmente vazio?

3) Qual o nível de água no reservatório na ocasião em que o decreto de emergência hídrica foi assinado?

4) A partir do sexto mês de racionamento, as chuvas retornaram e o reservatório voltou a encher regularmente de modo uniforme, a uma taxa de 18% ao mês.

- Expresse uma fórmula para o nível da água (y) em função do tempo (x) a partir desse mês.
- Usando essa nova fórmula, tente calcular em quanto tempo o reservatório estará totalmente cheio.

5) Expresse uma lei que represente o nível da água (y) em função do tempo (x) desde o primeiro mês de racionamento até quando o reservatório ficou totalmente cheio.

4ª Etapa: Aplicação

Sugestão de Questões de Aplicação referente ao CC1

Q1 (SOUZA; GARCIA, 2016a, p. 44, adaptado): No decorrer do século passado a população brasileira foi praticamente multiplicada por 10. Atualmente, segundo o IBGE, o Brasil possui mais de 200 milhões de habitantes. A tabela abaixo (dados do IBGE) mostra a evolução da população brasileira entre 1900 e 2010.

Q1 (SOUZA; GARCIA, 2016a, p. 44, adaptado): No decorrer do século passado a população brasileira foi praticamente multiplicada por 10. Atualmente, segundo o IBGE, o Brasil possui mais de 200 milhões de habitantes. A tabela abaixo (dados do IBGE) mostra a evolução da população brasileira entre 1900 e 2010.

a) A tabela representa uma função que relaciona duas grandezas. Quais são elas? Expresse-as por variáveis;

b) Use uma planilha (Excel) para representar essa função na forma geométrica e expresse sua forma algébrica;

c) Use a fórmula encontrada no item anterior e calcule a população brasileira atual;

d) Pesquise se a população encontrada com a fórmula corresponde à população real;

Ano	População (em milhões de habitantes)
1900	17,4
1920	30,6
1940	41,2
1960	71
1970	94,5
1980	121,2
1991	146,9
2000	169,6
2010	190,8

e) Você acha que a fórmula encontrada é um bom modelo matemático para expressar a população brasileira? Justifique.

Q2 (IEZZI et al. 2016a, p. 46, adaptado): A lei seguinte (fórmula) mostra a relação do valor V , em reais, de um smartphone e o seu tempo de uso t , em meses:

$$V(t) = 1800 \cdot \left(1 - \frac{t}{60}\right)$$

a) Qual o valor desse smartphone novo? E em um ano de uso? E em dois anos de uso?

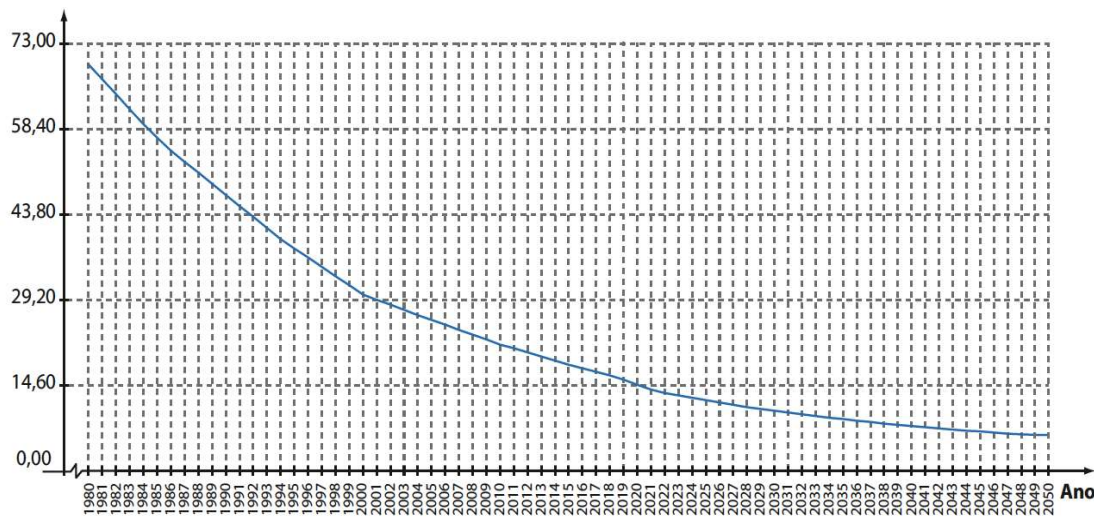
b) Em quanto tempo seu valor será a metade do valor de compra?

c) Em quanto tempo esse aparelho perderá totalmente seu valor?

d) Expresse o Domínio e a Imagem dessa função. O que representam?

e) Represente graficamente a função. Qual o formato do gráfico? O que isso significa?

Q3 (IEZZI et al. 2016a, p. 50, adaptado): O gráfico a seguir, representa a projeção da taxa de mortalidade infantil M (óbitos por 1000 nascidos) no decorrer do tempo t .



- De acordo com o gráfico, qual a tendência de evolução da taxa de mortalidade infantil? (crescimento ou decréscimo?). Justifique;
- Em 2001, qual foi a taxa de mortalidade?
- Qual a previsão da taxa de mortalidade no ano 2020?
- Monte uma tabela de valores (t, M) , considerando intervalo de cinco anos;
- Utilizando uma planilha (Excel), construa esse gráfico a partir da tabela do item anterior e expresse a fórmula (modelo matemático) que representa esses dados;
- Analise a validade dessa fórmula com as informações do gráfico; etc.



CAPÍTULO 2

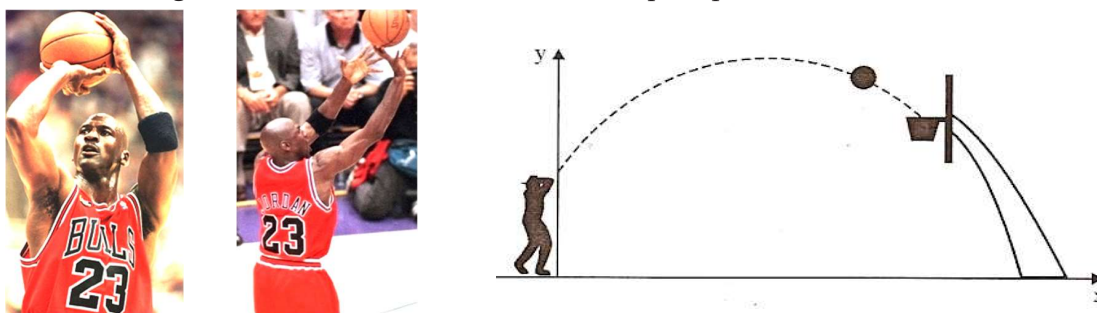
CC2 - FUNÇÃO POLINOMIAL DO 2º GRAU (QUADRÁTICA)

Situação 2.1: Basquete mágico!

1ª Etapa: Apresentação da situação-problema

Michael Jordan foi um dos maiores jogadores de basquete de todos os tempos. Jogou no Chicago Bulls pela NBA no período de 1984-1998, sendo campeão em seis temporadas. A figura a seguir ilustra o momento do lançamento de uma bola de basquete para a cesta feito por Jordan.

Figura 2: Lançamento de uma bola de basquete por Michael Jordan



Fonte: <https://br.pinterest.com/pin/344243965244462883/>, <https://ftw.usatoday.com/2016/02/celebrate-michael-jordans-birthday-with-9-classic-photos>, <https://brainly.com.br/tarefa/742934>.

Para facilitar a visualização da trajetória da bola nesse lançamento, foi inserido um sistema de coordenadas cartesianas para essa representação, de modo que a altura y (em m) da bola pode ser dada em função da distância horizontal x (em m) por:

Modelo 7

$$y = -0,25x^2 + 1,4x + 2,2$$

Identificando Variáveis a partir da Situação 2.1

- O modelo apresentado (Modelo 7) indica duas grandezas. Quais são elas?
- Que variável representa cada uma dessas grandezas?

2ª Etapa: Exploração e interpretação

Possíveis questões a partir da Situação 2.1

- Que tipo de função é essa? E o gráfico da trajetória da bola, como se chama?
- Em relação ao eixo vertical (eixo Oy), o que ocorre com a bola antes, durante e depois de atingir a altura máxima?
- Qual a altura máxima atingida pela bola nesse lançamento? Qual a posição da bola, na horizontal (eixo Ox), quando isso ocorre? Etc.

Sugestão de primeiras Ações Exploratórias ...

Tarefa 1: Ações exploratórias (Situação 2.1)

- 1) Sem realizar cálculos é possível determinar a altura da bola no momento do lançamento utilizando a expressão matemática acima. Qual essa altura? Explique.
- 2) Sabendo que a altura oficial da cesta fica 3,05 m do chão, a que distância da cesta (na horizontal) está o jogador?
- 3) Que altura a bola atinge quando sua posição (projecção) no eixo Ox está a 2 m do jogador? Qual a altura da bola quando essa projecção está a 3 m ou a 4 m do jogador?
- 4) Para encontrar a altura máxima que a bola pode atingir, como você faria? Etc.

3ª Etapa: Desenvolvimento do conteúdo curricular e Resolução

Sugestão de Discussões em torno da Situação 2.1

- Oportunizar aos estudantes que apresentem as estratégias de desenvolvimento da tarefa (Tarefa 1).
- Discutir as facilidades e dificuldades na realização da tarefa (Tarefa 1).
- Em relação ao item 4) da tarefa, propor que os estudantes calculem, por exemplo, as alturas $y = f(2,8)$, $y = f(3,5)$, $y = f(4,3)$, $y = f(5,6)$, $y = f(6,4)$, $y = f(7,2)$, $y = f(8,0)$. Questionar os estudantes sobre o significado dos resultados.
- Questionar o que caracteriza esse tipo de função e sua forma geométrica geral.
- Evidenciar a necessidade do novo conteúdo.

Nesse momento, o professor tem autonomia para desenvolver, em diálogo com os estudantes, o **conteúdo curricular** que evidencie o modelo geral em estudo e dê conta dos questionamentos levantados. Além disso, outras situações que se utilizam do modelo geral apresentado, podem ser evidenciadas e discutidas no grupo.

Sugestão de outras Ações Exploratórias ...

Tarefa 2: Ações Exploratórias a partir da Situação 2.1

- 1) Identificar os coeficientes a , b e c da função $y = -0,25x^2 + 1,4x + 2,2$ e discutir seu significado no contexto da situação.
- 2) Interpretar os valores $y = f(0)$, $y = f(1)$, $y = f(2)$, $y = f(2,8)$, $y = f(3,5)$, $y = f(4,3)$, $y = f(5,6)$, $y = f(6,4)$, $y = f(7,2)$, $y = f(8,0)$ no contexto da situação.
- 3) Calcular os valores de x tais que $f(x) = 3,05$, $f(x) = 5,25$ e $f(x) = 6,50$. Discutir o significado desses valores no contexto da situação.
- 4) Calcular a altura máxima atingida pela bola, representada pela função $y = -0,25x^2 + 1,4x + 2,2$, usando os conhecimentos adquiridos na explanação do conteúdo sobre as coordenadas do vértice da parábola.
- 5) Calcular a posição da bola, na horizontal (eixo Ox), quando isso ocorre. Etc.

4ª Etapa: Aplicação

Questões de Aplicação são sugeridas no final da seção.

Situação 2.2: Como construir um galinheiro e aproveitar melhor o espaço?

1ª Etapa: Apresentação da situação-problema

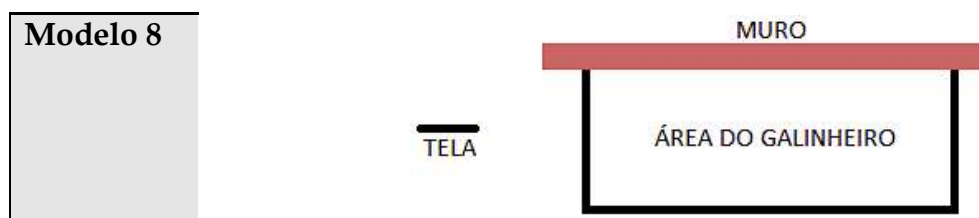
(IEZZI et al., 2016a, adaptado). Na comunidade Perema (14 km de Santarém na Av. Curuá-Uma (PA-370)), um pequeno criador de galinhas resolve construir um galinheiro retangular no seu terreno. Dispondo apenas de 30 m de tela, o homem decide aproveitar um muro desse terreno como uma das laterais do galinheiro conforme a figura abaixo:

Figura 3: Pensando no projeto “O galinheiro”



Fonte: Adaptado pelo autor a partir de <https://tomroyreleased.wordpress.com/2017/02/06/hitting-the-spiritual-wall/>, <https://br.depositphotos.com/107728356/stock-illustration-cartoon-farmer-feeding-chickens.html> e https://produto.mercadolivre.com.br/MLB-774046121-tela-pvc-viveiro-preto-1-x-10metros-_JM?quantity=1.

Esse projeto pode ser simplificado pelo desenho a seguir (Modelo 2):



Fonte: <http://edumatecno.blogspot.com/2013/04/desenvolvendo-uma-atividade-de.html>.

Identificando Variáveis a partir da Situação 2.2

- O galinheiro idealizado acima (Modelo 8) indica três grandezas. Quais são elas?
- Que variáveis você indicaria pra representar cada uma dessas grandezas?

2ª Etapa: Exploração e interpretação**Possíveis questões a partir da Situação 2.2**

- De quantas maneiras é possível cercar esse galinheiro?
- A área obtida é sempre a mesma? É possível o galinheiro ter uma área de 112 m^2 ? Por quê? E 125 m^2 ? Por quê?
- Caso seja possível o galinheiro ter alguma dessas áreas (112 m^2 ou 125 m^2), quais seriam as dimensões x e z ?
- Quais as dimensões (x e z) que dão a maior área possível para esse galinheiro? Qual será essa área? Etc.

Sugestão de primeiras Ações Exploratórias ...**Tarefa 1: Ações exploratórias a partir da Situação 2.2**

- 1) Esboce algumas possibilidades de como cercar o galinheiro. Encontrar as áreas em cada caso.
- 2) Ao considerar os três lados do galinheiro que serão cercados, representando os lados iguais por x (metros) e o outro lado por z (metros), evidencie a expressão matemática da área do galinheiro $y = f(x)$.
- 3) Tente encontrar as dimensões do galinheiro pra que este tenha uma área de 112 m^2 (por tentativas). Fazer o mesmo para tentar obter uma área de 120 m^2 .
- 4) A partir das ideias apresentadas no item 1), tente obter (por tentativas) a área máxima do galinheiro. Etc.

3ª Etapa: Desenvolvimento do conteúdo curricular e Resolução**Sugestão de Discussões em torno da Situação 2.2**

- Oportunizar aos estudantes que apresentem as estratégias de desenvolvimento da tarefa (Tarefa 1).
- Discutir as facilidades e dificuldades na realização da tarefa (Tarefa 1).
- Em relação ao item 4) da tarefa (Tarefa 1), evidenciar a necessidade de conhecer o vértice da parábola.
- Questionar o que caracteriza esse tipo de função e sua forma algébrica geral.
- Evidenciar a necessidade do novo conteúdo.

Nesse momento, o professor tem autonomia para desenvolver, em diálogo com os estudantes, o **conteúdo curricular** que evidencie o modelo geral em estudo e dê conta dos questionamentos levantados. Além disso, outras situações que se utilizam do modelo geral apresentado, podem ser evidenciadas e discutidas no grupo.

Sugestão de outras Ações Exploratórias ...

Tarefa 2: Ações exploratórias a partir da **Situação 2.2**

- 1) Verifique se é possível o galinheiro ter uma área de 120 m^2 ou 125 m^2 (resolver equações do 2º grau e discutir as raízes). Explique.
- 2) Caso seja possível, calcule em cada situação, as dimensões x e z estabelecidas anteriormente.
- 3) Encontre as dimensões $(x \text{ e } z)$ que dão a maior área possível para esse galinheiro, utilizando para isso, os conhecimentos sobre o vértice da parábola.
- 4) Calcule essa área máxima. Etc.

4ª Etapa: Aplicação

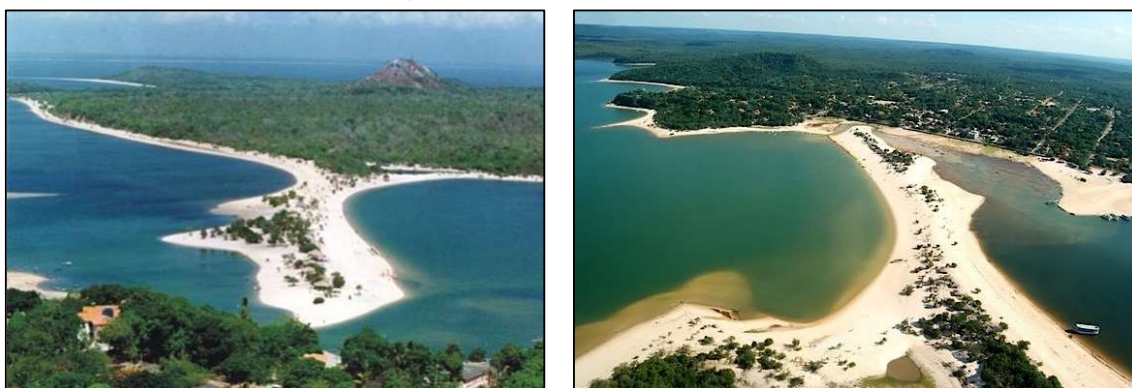
Questões de Aplicação são sugeridas no final da seção.

Situação 2.3: Você já foi à praia de Alter-do-Chão?

1ª Etapa: Apresentação da situação-problema

(ENEM – 2015, adaptado). A praia de Alter-do-Chão (Figura 2) está entre as dez mais bonitas do Brasil. Localizada no oeste do Pará, é a primeira entre os dez lugares com as praias mais bonitas do Brasil, chamado de “Caribe brasileiro” pelo jornal inglês *The Guardian*. O jornal também aponta o lugar como o mais bonito do mundo com praias de águas doces. Perfeita para relaxar, a natureza foi bem generosa com a vila de pescadores, que pertence à cidade de Santarém. O cenário é paradisíaco (figura abaixo) e guarda uma beleza única, já que suas praias são às margens do Rio Tapajós.

Figura 4: Praia de Alter-do-Chão



Fonte: <https://br.pinterest.com/pin/59391288811206351/?nic=1>.

Uma excursão à vila pode ser feita em pequenas embarcações, navegando as águas verde-azuladas do Rio Tapajós, saindo da orla de Santarém (à 38 km da vila aproximadamente).

Modelo 9

“Seu” Antônio é dono de uma dessas embarcações, cuja capacidade máxima é de 40 passageiros, e cobra para uma excursão (ida e volta) até a vila e arredores, R\$ 60,00 de cada passageiro. Uma condição colocada por ele é que se não atingir a capacidade máxima da embarcação, cada passageiro deve pagar mais R\$ 2,00 por lugar vago.

Identificando Variáveis a partir da Situação 2.3

- O modelo implícito acima (Modelo 9) indica a presença de algumas grandezas. Quais são elas?
- Que variáveis você indicaria para representa cada uma dessas grandezas?

2ª Etapa: Exploração e interpretação

Possíveis questões a partir da Situação 2.3

- Como seria uma expressão matemática que permite calcular o valor a ser arrecadado em função do número de lugares vagos?
- Para as pessoas que vão numa excursão dessa, o ideal é que todos os lugares sejam ocupados, mas para o dono da embarcação seria bom que não. Sendo assim, quantos lugares deveriam ser vagos para que o “Seu” Antônio tenha a maior arrecadação possível? Qual seria esse valor? etc.

Sugestão de primeiras Ações Exploratórias ...

Tarefa 1: Ações exploratórias a partir da Situação 2.3

- 1) Tente encontrar uma expressão matemática $y = f(x)$ que permite calcular o valor a ser arrecadado em função do número de lugares vagos.
- 2) Para as pessoas que vão numa excursão dessa, o ideal é que todos os lugares sejam ocupados, mas para o dono da embarcação seria bom que não. Sendo assim, a partir da expressão matemática encontrada no item 1), tente calcular (por tentativas) o número ideal de lugares vagos para que “Seu” Antônio tenha a maior arrecadação possível. Tente achar esse valor (evidenciar a necessidade de conhecer o vértice da parábola). Etc.

Observação: Para orientar os estudantes no item 1) e, conseqüentemente, no restante da Tarefa 1, o professor pode construir junto com eles o quadro a seguir (Quadro 1):

Quadro 1: Expressão matemática $y = f(x)$ do Valor Total arrecadado por “Seu” Antônio

Nº de Lugares Vagos	Valor Individual	Valor Total
0	60	$40 \cdot 60$
1	$60 + 2 \cdot 1$	$(40 - 1) \cdot (60 + 2 \cdot 1)$
2	$60 + 2 \cdot 2$	$(40 - 2) \cdot (60 + 2 \cdot 2)$
3		
4		
⋮	⋮	⋮
x		

Fonte: Elaborado pelo autor.

3ª Etapa: Desenvolvimento do conteúdo curricular e Resolução

Sugestão de Discussões em torno da Situação 2.3

- Oportunizar aos estudantes que apresentem as estratégias de desenvolvimento da tarefa (Tarefa 1).
- Discutir as facilidades e dificuldades na realização da tarefa (Tarefa 1).
- Em relação aos itens 2) e 3) da tarefa (Tarefa 1), evidenciar a necessidade de conhecer o vértice da parábola.
- Questionar o que caracteriza esse tipo de função e sua forma algébrica geral.
- Evidenciar a necessidade do novo conteúdo.

Nesse momento, o professor tem autonomia para desenvolver, em diálogo com os estudantes, o **conteúdo curricular** que evidencie o modelo geral em estudo e dê conta dos questionamentos levantados. Além disso, outras situações que se utilizam do modelo geral apresentado, podem ser evidenciadas e discutidas no grupo.

Sugestão de outras Ações Exploratórias ...

Tarefa 2: Ações exploratórias a partir da Situação 2.3

- 1) Identifique os coeficientes a , b e c da função $y = -2x^2 + 20x + 2400$ e interpretá-los dentro do contexto da situação.
- 2) Verifique se é possível o seu Antônio arrecadar R\$ 2500,00 ou R\$ 3000,00 nessa excursão, utilizando para isso, os conhecimentos sobre resolução da equação do 2º grau e discussão de suas raízes. Caso seja possível, calcule em cada arrecadação, o número de lugares vagos.
- 3) Calcule o número de lugares vagos para que o “Seu” Antônio tenha a maior arrecadação possível, utilizando os conhecimentos sobre o vértice da parábola nos problemas de otimização (Máx. e Mín.). Calcule esse valor máximo. Etc.

4ª Etapa: Aplicação

Questões de Aplicação são sugeridas no final da seção.

Situação 2.4: Que tal um sorvete pra refrescar!?

1ª Etapa: Apresentação da situação-problema

(IEZZI et al., 2016a, adaptado). Devido ao calor que faz em Santarém em quase todo o ano, um convite desses não é nada mal! Pensando nisso, foi que Ana resolveu abrir uma sorveteria na sua própria casa, no bairro Aparecida.

Figura 5: Sorvetes da Ana



Fonte: <https://camoon.wixsite.com/feiramoderna/sorvetes-da-amazonia>

No primeiro mês (agosto), quando o calor é mais intenso em Santarém, Ana observou que:

Modelo 10 Quando o preço do sorvete (de uma bola) é fixado em R\$ 3,50, são vendidas 60 bolas por dia. Procurando aumentar sua arrecadação, Ana fez algumas reduções no preço da bola de sorvete que acarretaram um aumento nas vendas. Nessa relação entre preço e número de bolas de sorvete vendidos, ela pôde verificar que, para cada R\$ 0,10 de desconto, o número de bolas de sorvete vendidos por dia aumentava em 4 unidades.

Identificando Variáveis a partir da Situação 2.4

- De acordo com o modelo apresentado (Modelo 10), podemos identificar algumas grandezas. Quais são elas?
- Que variável você utilizaria para representar cada uma dessas grandezas?

2ª Etapa: Exploração e interpretação

Observação: Podemos considerar como a variável que x representa a quantidade de vezes que é dado o desconto de R\$ 0,10 no preço fixado inicialmente na bola de sorvete (R\$ 3,50), e y , a receita diária. Nesse caso, podemos fazer alguns questionamentos.

Possíveis questões a partir da Situação 2.4

- Ao analisar a situação, Ana ficou interessada em saber qual o preço a ser cobrado pela bola de sorvete que proporcionaria a maior receita possível, isto é, a receita máxima. Para que isso ocorra, qual o preço a ser cobrado pela bola de sorvete?
- Qual a quantidade de bolas de sorvete vendidas por esse preço?
- Qual a receita gerada nessas condições?
- Em termos gerais, como seria uma expressão matemática $y = f(x)$ que dá a receita em função do desconto? Etc.

Sugestão de primeiras Ações Exploratórias ...**Tarefa 1: Ações exploratórias a partir da Situação 2.4**

- 1) Qual será a receita arrecadada por Ana se for dado um desconto de R\$ 0,10 na bola de sorvete? E se for R\$ 0,20? E se for R\$ 0,30?
- 2) Que expressão matemática $y = f(x)$ permite calcular a receita gerada em função do desconto de x vezes do valor R\$ 0,10 no preço fixado inicialmente na bola de sorvete?
- 3) Utilizando essa expressão matemática, qual o valor do desconto em cada bola de sorvete para que se tenha a receita máxima? (por tentativas) Qual essa receita? Etc.

Observação: Para orientar os estudantes no item 2) e, conseqüentemente, no restante da Tarefa 1, o professor pode construir junto com eles o quadro abaixo.

Quadro 2: Expressão matemática $y = f(x)$ da receita diária arrecadada por Ana

Nº de descontos	Valor Individual	Receita
0	3,50	$60 \cdot 3,50$
1	$3,50 - 0,10 \cdot 1$	$(60 + 4 \cdot 1) \cdot (3,50 - 0,10 \cdot 1)$
2	$3,50 - 0,10 \cdot 2$	$(60 + 4 \cdot 2) \cdot (3,50 - 0,10 \cdot 2)$
3		
⋮	⋮	⋮
x		

Fonte: Elaborado pelo autor.

3ª Etapa: Desenvolvimento do conteúdo curricular e Resolução

Sugestão de Discussões em torno da Situação 2.4

- Oportunizar aos estudantes que apresentem as estratégias de desenvolvimento da tarefa (Tarefa 1).
- Discutir as facilidades e dificuldades na realização da tarefa (Tarefa 1).
- Na construção do Quadro 2, o professor induz os estudantes a perceber que uma expressão matemática que permite calcular a receita y em função do número x de descontos de R\$ 0,10 em cada bola de sorvete pode ser dada pela função (quadrática) $y = -0,4x^2 + 8x + 210$.
- Em relação ao item 3) da tarefa (Tarefa 1), evidenciar a necessidade de conhecer o vértice da parábola, isto é, a necessidade do novo conteúdo.
- Questionar o que caracteriza esse tipo de função e sua forma algébrica geral.

Nesse momento, o professor tem autonomia para desenvolver, em diálogo com os estudantes, o **conteúdo curricular** que evidencie o modelo geral em estudo e dê conta dos questionamentos levantados. Além disso, outras situações que se utilizam do modelo geral apresentado, podem ser evidenciadas e discutidas no grupo.

Sugestão de outras Ações Exploratórias ...

Tarefa 2: Ações exploratórias a partir da Situação 2.4

- 1) Identifique os coeficientes a , b e c da função $y = -0,4x^2 + 8x + 210$ e interprete-os dentro do contexto da situação apresentada.
- 2) Verifique, nessas condições, se é possível Ana ter uma receita diária de R\$ 240,00 na venda de sorvetes. E R\$ 260,00? (fazer uso dos conhecimentos sobre resolução de equação do 2º grau e discussão das raízes).
- 3) Em relação ao item anterior 2), caso seja possível, calcule o desconto dado em cada bola de sorvete.
- 4) Calcule o preço a ser cobrado por Ana pela bola de sorvete a fim de obter a receita máxima e o número de bolas de sorvete vendidas por esse preço (fazer uso dos conhecimentos sobre vértice da parábola e problemas de otimização).
- 5) Calcule a receita máxima. etc.

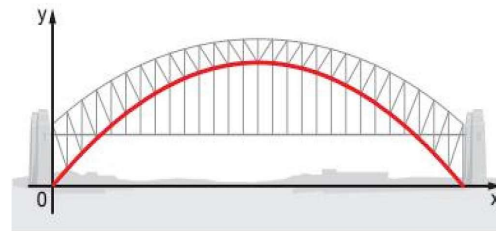
4ª Etapa: Aplicação

Sugestão de Questões de Aplicação referentes ao CC2

Q1. (C2/V1/q.38/p.108) Um biólogo desejava comparar a ação de dois fertilizantes. Para isso, duas plantas **A** e **B** da mesma espécie, que nasceram no mesmo dia, foram desde o início tratadas com fertilizantes diferentes. Durante vários dias ele acompanhou o crescimento dessas plantas, medindo, dia a dia, suas alturas. Ele observou que a planta **A** cresce linearmente, à taxa de $2,5 \text{ cm}$ por dia; e a altura da planta **B** pode ser modelada pela função dada por $y = \frac{20x - x^2}{6}$, em que y é a altura (em cm) e x o tempo (em dias). Determine: **a)** A diferença entre as alturas dessas plantas com 2 dias de vida; **b)** A lei da função que representa a altura (y) da planta **A** em função de x (n° de dias)? **c)** O dia em que as duas plantas atingiram a mesma altura e qual essa altura; **d)** A taxa média de variação do crescimento das plantas **A** e **B** do dia 1 ao 4.

Q2. (C1/V1/q.58/p.129) Num voo com capacidade para 100 pessoas, fretado para uma viagem turística, uma companhia aérea cobra R\$ 200,00 por pessoa quando todos os lugares são ocupados. Se existirem lugares não ocupados, o preço de cada passagem será acrescido de R\$ 4,00 por cada lugar não ocupado. **a)** Determine a expressão matemática que dá a receita arrecadada por essa companhia (y) em função do número de lugares não ocupados (x); **b)** Quantos devem ser os lugares não ocupados para a receita ser máxima; **c)** Qual essa receita?

Q3. (C4/V1/q.40/p.123) Na construção de edifícios e monumentos, seja por propriedades estruturais ou por motivos estéticos, podemos observar a presença de forma que se assemelham a uma parábola. Algumas pontes, por exemplo, apresentam



em sua estrutura um arco em forma de parábola. Observe o esquema ao lado de uma ponte sobre um rio cujo arco lembra uma parábola. Esse arco pode ser representado por $y = -0,0021x^2 + 1,0563x$, onde y representa a distância entre o nível do rio e o arco, e x representa a distância em linha reta a partir de uma das extremidades do arco no nível do rio, ambos em metros.

a) Supondo que uma pessoa escale a ponte representada no esquema, qual será a maior altura que ela poderá atingir, em relação ao nível do rio? **b)** Qual é a distância entre as extremidades do arco formado pela ponte, representada no esquema, no nível do rio?

Q4. (C2/V1/q.32/p.105) Um fazendeiro possui 150 m de um rolo de tela para cercar um jardim retangular e um pomar, aproveitando, como um dos lados, parte de um muro, conforme a figura:



a) Para cercar com tela a maior área possível, quais os valores x e y ?

b) E se não fosse possível aproveitar a parte do muro? Em que percentual ficaria reduzida a área da superfície limitada pelo jardim e pomar reunidos?

Q5. (C5/V1/q.14/p.188) Uma indústria têxtil vende diariamente 800 m^2 de certo tipo de tecido ao preço de R\$ 10,00 por metro quadrado. Uma pesquisa de mercado revelou que, para cada desconto de R\$ 0,04 por metro quadrado desse tecido, haveria um acréscimo diário de 5 m^2 nas vendas. Levando em consideração essa pesquisa, o departamento de vendas da indústria estabeleceu o preço por metro quadrado desse tecido para que a receita diária arrecadada com sua venda fosse máxima. **a)** Qual foi o preço estabelecido por metro quadrado desse tecido? **b)** Qual será a receita diária apurada com a venda desse tecido para o preço estabelecido?

Q6. (ENEM - 2010.1) Nos processos industriais, como na indústria de cerâmica, é necessário o uso de fornos capazes de produzir elevadas temperaturas e, em muitas situações, o tempo de elevação dessa temperatura deve ser controlado, para garantir a qualidade do produto final e a economia do processo. Em uma indústria de cerâmica, o forno é programado para elevar a temperatura ao longo do tempo de acordo com a função $y = f(t)$, em que y é o valor da temperatura do forno ($^{\circ}\text{C}$), e t o tempo (min), decorrido desde o instante que o forno é ligado.

$$y = \begin{cases} \frac{7}{5}t + 20, & \text{para } 0 \leq t < 100 \\ \frac{2}{125}t^2 - \frac{16}{5}t + 320, & \text{para } t \geq 100 \end{cases}$$

Uma peça é colocada nesse forno quando a temperatura é 48°C e retirada quando atinge 200°C . Quanto tempo a peça permanece no forno?

Q6. (ENEM - 2010.1) Nos processos industriais, como na indústria de cerâmica, é necessário o uso de fornos capazes de produzir elevadas temperaturas e, em muitas situações, o tempo de elevação dessa temperatura deve ser controlado, para garantir a qualidade do produto final e a economia do processo. Em uma indústria de cerâmica, o forno é programado para elevar a temperatura ao longo do tempo de acordo com a função $y = f(t)$, em que y é o valor da temperatura do forno ($^{\circ}\text{C}$), e t o tempo (min), decorrido desde o instante que o forno é ligado.

$$y = \begin{cases} \frac{7}{5}t + 20, & \text{para } 0 \leq t < 100 \\ \frac{2}{125}t^2 - \frac{16}{5}t + 320, & \text{para } t \geq 100 \end{cases}$$

Uma peça é colocada nesse forno quando a temperatura é 48°C e retirada quando atinge 200°C . Quanto tempo a peça permanece no forno?





CAPÍTULO 3

CC3 - FUNÇÃO EXPONENCIAL

Situação 3.1: Cuidado com as bactérias!

1ª Etapa: Apresentação das situações-problema

(DANTE, 2016a, p. 148, ampliada). A *E. coli* (*Escherichia coli*) é uma bactéria que habita naturalmente no intestino de humanos e de alguns animais, mas que em grandes quantidades pode causar problemas como gastroenterite ou infecção urinária, dependendo se o excesso de bactérias surgiu no intestino ou no trato urinário e acontecendo, principalmente, quando se consome água ou alimentos contaminados.

Figura 6 - Cultura de bactérias *E. coli* produzida em laboratório



Fonte: <https://observador.pt/2015/05/19/usar-virus-combater-bacterias-super-resistentes/>, <https://exame.abril.com.br/mundo/novas-infeccoes-com-bacteria-e-coli-na-franca-e-belgica-2/>.

Por isso, é recomendado sempre higienizar bem os alimentos, especialmente saladas cruas, não reaquecer mais de uma vez a comida já pronta, consumir sempre água filtrada ou fervida e lavar bem as mãos antes e depois de usar o banheiro.

Modelo 11 Sob condições ideais, as bactérias *E. coli* se reproduzem, dobrando seu número a cada 20 minutos, aproximadamente.

Identificando Variáveis a partir da Situação 3.1

- Duas grandezas podem ser identificadas no modelo (Modelo 11). Quais são elas?
- Que variável você utilizaria para representar cada uma dessas grandezas?

2ª Etapa: Exploração e interpretação

Possíveis questões a partir da Situação 3.1

- Como seria uma expressão matemática que permita calcular o número total dessas bactérias em função do número de períodos de 20 minutos?
- Que tipo de função é essa?
- Qual a quantidade de bactérias depois de um tempo qualquer não múltiplo de 20 minutos?
- Em quanto tempo a quantidade de bactérias inicial duplica (triplica, quadruplica, quintuplica)? Etc.

Sugestão de primeiras Ações Exploratórias ...

Tarefa 1: Ações exploratórias a partir da Situação 3.1

- 1) Suponha que numa certa cultura exista aproximadamente 1000 bactérias *E. coli*. Qual o número total delas em 20 minutos? E em 40 minutos? E em 60 minutos? E em 80 minutos?
- 2) Seguindo o raciocínio do item 1), como você expressaria uma fórmula para o número total da bactéria *E. coli*, representado por y , em função de n períodos de 20 minutos, considerando 1000 bactérias como a quantidade inicial? Etc.

3ª Etapa: Desenvolvimento do conteúdo curricular e Resolução

Sugestão de Discussões em torno da Situação 3.1

- Oportunizar aos estudantes que apresentem as estratégias de desenvolvimento da tarefa (Tarefa 1).
- Discutir as facilidades e dificuldades na realização da tarefa (Tarefa 1).
- Retomar o item 2) da Tarefa 1, e evidenciar a expressão que os estudantes encontraram, que deverá ser $f(n) = 1000 \cdot 2^n$ (n representa a quantidade de períodos de 20 minutos).
- Questionar os estudantes, como seria uma expressão matemática que permite calcular o número total de bactérias y em função de um tempo qualquer x , não só a cada período n de 20 minutos. A ideia é incentivar os estudantes a chegarem à expressão $y = 1000 \cdot 2^{0,05x}$, cujo modelo geral é da forma $f(x) = y_0 \cdot a^{rx}$. Para isso, o professor pode propor que se calcule, por exemplo, a quantidade de bactérias *E. coli* em 50, 70, e 90 minutos. Nessa discussão, o professor pode levar

Nesse momento, o professor tem autonomia para desenvolver, em diálogo com os estudantes, o **conteúdo curricular** que evidencie o modelo geral em estudo e dê conta dos questionamentos levantados. Além disso, outras situações que se utilizam do modelo geral apresentado, podem ser evidenciadas e discutidas no grupo.

Sugestão de outras Ações Exploratórias ...

Tarefa 2: Ações Exploratórias a partir da Situação 3.1

- 1) Usando uma calculadora científica, calcule o número de bactérias após:
 - a) 2 horas e 50 minutos.
 - b) 4 horas e 35 minutos.
 - c) 9 horas e 13 minutos.
 - 2) Usando uma calculadora científica e fazendo aproximações, calcule em quanto tempo o número de bactérias:
 - a) Dobra e Quadruplica
 - b) Triplica e Quintuplica
- Etc.

4ª Etapa: Aplicação

Questões de Aplicação são sugeridas no final da seção.

Situação 3.2: Tá precisando de dinheiro emprestado?

1ª Etapa: Apresentação das situações-problema

(DANTE, 2016a, p. 149, ampliado). O grande problema são as taxas de juros! Essas taxas, aplicadas em dívidas contraídas em cartões de crédito ou cheque especial, por exemplo, estão entre as mais altas no Brasil, passando dos **10%** ao mês. Os principais bancos do nosso país usam taxas menores, mas ainda assim, são consideradas altas para a nossa realidade. Segundo informações do Banco Central, em geral, os bancos cobram juros acima de **4%** ao mês para empréstimo pessoal.

Modelo 12 Ana, que estava precisando com urgência de R\$ 10 000,00 resolveu fazer um empréstimo pessoal, e para sua “sorte”, encontrou um banco que ofereceu taxa de juros de 3% ao mês para que ela pagasse ao final de 3 meses.

Identificando Variáveis a partir da Situação 3.2

- Algumas grandezas podem ser percebidas no modelo acima (Modelo 12). Quais são elas?
- Que variável você utilizaria para representar cada uma dessas grandezas?

2ª Etapa: Exploração e interpretação

Possíveis questões a partir da Situação 3.2

- Nessas condições, qual o montante a ser pago por Ana ao final dos 3 meses?
- Qual o montante que Ana pagaria se o prazo fosse 5 meses?
- Como seria uma expressão geral para o montante a ser pago por Ana se o prazo de pagamento fosse generalizado para t meses?
- E se generalizarmos também a taxa de juros, isto é, considerarmos i % ao mês, como seria uma expressão geral desse montante? etc.

Sugestão de primeiras Ações Exploratórias ...

Tarefa 1: Ações exploratórias a partir da Situação 3.2

- 1) Qual o montante a ser pago por Ana ao final de 1 mês? (Calcular $M(1)$).
- 2) Qual o montante a ser pago por Ana ao final de 2 meses? (Calcular $M(2)$).
- 3) Qual o montante a ser pago por Ana ao final de 3 meses? (Calcular $M(3)$).
- 4) Se a dívida de Ana tivesse que ser paga ao final de 5 meses, dando prosseguimento na sequência iniciada nos itens anteriores, quanto seria esse montante? etc.

3ª Etapa: Desenvolvimento do conteúdo curricular e Resolução

Sugestão de Discussões em torno da Situação 3.2

- Oportunizar aos estudantes que apresentem as estratégias de desenvolvimento da tarefa (Tarefa 1).
- Discutir as facilidades e dificuldades na realização da tarefa (Tarefa 1).
- Em diálogo com os estudantes, o professor retoma o processo desenvolvido na Tarefa 1, quando encontraram a expressão $M(5) = 10000 \cdot (1,03)^5$, e questiona como seria uma expressão matemática que permite calcular o montante da dívida caso tivesse que ser paga ao final de 10 meses, 20 meses, 50 meses e t meses. A ideia é fazer os estudantes expressarem esses montantes, respectivamente, por $M(10) = 10\,000 \cdot (1,03)^{10}$, $M(20) = 10\,000 \cdot (1,03)^{20}$, $M(50) = 10\,000 \cdot (1,03)^{50}$ e $M(t) = 10\,000 \cdot (1,03)^t$, cujo modelo geral é da forma $M(t) = M_0 \cdot (1 + i)^t$ se for generalizada também a taxa de juros para $i\%$ ao mês e o valor inicial do empréstimo para M_0 .
- Questionar o que caracteriza esse tipo de função e sua forma algébrica geral. etc.

Nesse momento, o professor tem autonomia para desenvolver, em diálogo com os estudantes, o **conteúdo curricular** que evidencie o modelo geral em estudo e dê conta dos questionamentos levantados. Além disso, outras situações que se utilizam do modelo geral apresentado, podem ser evidenciadas e discutidas no grupo.

Sugestão de outras Ações Exploratórias ...

Tarefa 2: Ações Exploratórias a partir da Situação 3.2

- 1) Usando uma calculadora científica, calcule o montante a ser pago por Ana se o prazo fosse de:
 - a) 6 meses b) 1 ano c) 3 anos
- 2) Usando uma calculadora científica e fazendo aproximações, calcule em quanto tempo o montante a ser pago por Ana:
 - a) Dobra b) Triplica c) Quadruplica d) Quintuplica

4ª Etapa: Aplicação

Questões de Aplicação são sugeridas no final da seção.

Situação 3.3: Como está sua radiação hoje?

1ª Etapa: Apresentação das situações-problema

(DANTE, 2016a; IEZZI et al., 2016a; ENEM – 2013, Q. 166, adaptado). Estudos mostram que a radiação de celulares pode ser prejudicial à saúde¹. Você sabia que o corpo humano também emite radiação? Que possui radioatividade? (sugerir pesquisa sobre o assunto). A radioatividade é um fenômeno que ocorre em núcleos de átomos instáveis por emitirem partículas e radiações. Os átomos radioativos estão presentes no meio ambiente (atmosfera, rochas, cavidades subterrâneas, hidrosfera etc.), alimentos e seres vivos. O núcleo de um átomo com excesso de energia tende a se estabilizar emitindo um grupo de partículas (radiação alfa ou beta) ou ondas eletromagnéticas (radiações gama). Em cada emissão de uma das partículas, há variação do número de prótons e nêutrons no núcleo e, deste modo, um elemento químico se transforma em outro, chamado **decaimento radioativo**.

Considerando uma grande quantidade de átomos de um mesmo elemento químico radioativo, espera-se certo número de emissões por unidade de tempo. Essa “taxa de emissões” é a atividade da amostra. Cada elemento radioativo se transmuta (desintegra) a uma velocidade que lhe é característica. Veja o caso do cézio-137. Em setembro de 1987, Goiânia foi palco do maior acidente radioativo ocorrido no Brasil, quando uma amostra de cézio-137, removida de um aparelho de radioterapia abandonado, foi manipulada inadvertidamente por parte da população.

Figura 7 - Acidente Radioativo em Goiânia (1987)



Técnicos orientando o carregamento de lixo radioativo depois do acidente com o cézio-137. Goiânia-GO. Fotografia de 1987.

Fonte: Dante (2016a, p. 174).

Considerando que M_0 era a quantidade inicial dessa amostra e sabendo que a taxa de desintegração, obtida experimentalmente, é **0,023**, então a quantidade

¹ Disponível em: <http://glo.bo/1JKsTd7>. Acesso em: 21 ago. 2019.

restante de massa do cézio-137, após t anos, pode ser expressa pela expressão matemática:

Modelo 13

$$M(t) = M_0(2,7)^{-0,023t}$$

Identificando Variáveis a partir da Situação 3.3

- O modelo acima (Modelo 13) indica algumas grandezas. Quais são elas?
- Que variáveis são utilizadas para representar essas grandezas?

2ª Etapa: Exploração e interpretação
Possíveis questões a partir da Situação 3.3

- Que tipo de função é essa?
- Ainda há radiação sendo emitida naquela localidade (Goiânia) hoje em dia?
- Sabe-se que o lugar onde ocorreu o acidente só poderá ser habitado novamente quando a quantidade de massa radioativa de cézio-137 se reduzir, por desintegração, a 3% da quantidade inicial, quanto tempo isso vai demorar (contando a partir da data do acidente, isto é, 1987)? Em que ano será? etc.

Sugestão de primeiras Ações Exploratórias ...
Tarefa 1: Ações exploratórias a partir da Situação 3.3

- 1) Depois de 5 anos do acidente, que quantidade de radiação era emitida naquela localidade? E depois de 10 anos? E depois de 15 anos? E hoje em dia?
- 2) Sabe-se que a **meia-vida** de um elemento radioativo é o intervalo de tempo necessário que a massa radioativa leva para reduzir à metade (50%) da quantidade inicial. Para estimar a meia-vida do cézio-137, que estratégia você usaria? Etc.

Observação: Para auxiliar a realização do item 2) da Tarefa 1, dependendo do desempenho dos estudantes, o professor pode sugerir que eles calculem e registrem as quantidades de massa radioativa remanescentes após 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45 e 50 anos.

3ª Etapa: Desenvolvimento do conteúdo curricular e Resolução

Sugestão de Discussões em torno da Situação 3.3

- Oportunizar aos estudantes que apresentem as estratégias de desenvolvimento da tarefa (Tarefa 1).
- Discutir as facilidades e dificuldades na realização da tarefa (Tarefa 1).
- Retomando o item 2) da Tarefa 1, evidenciar a necessidade de aprofundamento para resolver esse tipo de problema.
- Em diálogo com os estudantes, o professor retoma o processo de decaimento radioativo representado pelo modelo $M(t) = M_0 \cdot (2,7)^{-0,023t}$, e questiona que tipo de função é essa, o que a caracteriza e qual sua forma algébrica geral.
- Etc.

Nesse momento, o professor tem autonomia para desenvolver, em diálogo com os estudantes, o **conteúdo curricular** que evidencie o modelo geral em estudo e dê conta dos questionamentos levantados. Além disso, outras situações que se utilizam do modelo geral apresentado, podem ser evidenciadas e discutidas no grupo.

Sugestão de outras Ações Exploratórias ...

Tarefa 2: Ações Exploratórias a partir da Situação 3.3

- 1) Usando uma calculadora científica e fazendo aproximações, calcule em quanto tempo a massa radioativa de cézio-137 será reduzida para 32%.
- 2) Usando uma calculadora científica e fazendo aproximações, calcule em quanto tempo a massa radioativa de cézio-137 será reduzida para 10%.
- 3) Usando uma calculadora científica e fazendo aproximações, calcule em quanto tempo a massa radioativa de cézio-137 será reduzida para 5%.
- 4) Usando uma calculadora científica e fazendo aproximações, estime em que ano o local onde ocorreu o acidente poderá ser habitado novamente com segurança, sabendo que isso só ocorrerá quando a quantidade massa radioativa de cézio-137 se reduzir, por desintegração, a 3% da quantidade inicial. Etc.

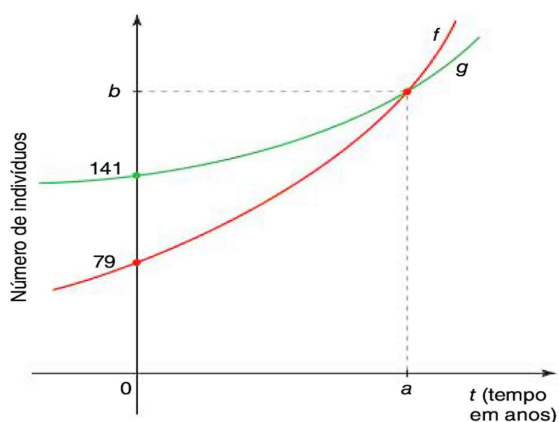
4ª Etapa: Aplicação

Sugestão de Questões de Aplicação referentes ao CC3

Q1. (C2/V1/q.25/p. 141) Em uma indústria alimentícia, verificou-se que, após t semanas de experiência e treinamento, um funcionário consegue empacotar n unidades de um determinado produto, a cada hora de trabalho. A lei que relaciona n e t é $n(t) = 55 - 30 \cdot e^{-0,2t}$. **a)** Quantas unidades desse produto o funcionário consegue empacotar sem experiência alguma? **b)** Qual o acréscimo na produção, por hora, que o funcionário experimenta da 1ª para a 2ª semana de experiência? **c)** Qual o limite máximo teórico que um funcionário pode empacotar por hora?

Q2. (C4/V1/q.30/p. 144) Determinado imóvel foi avaliado em 350 mil reais e, a partir daí, valoriza-se 10% anualmente. **a)** Determine a expressão matemática que dá o valor y (em milhares de reais) desse imóvel em função do tempo t (em anos); **b)** Qual será o valor desse imóvel após 3 anos da avaliação? **c)** E após 10 anos?

Q3. (C5/V1/q.33/p.232) As populações de dois vilarejos, **A** e **B**, variam de acordo com as funções $f(t) = 2^{t+2} + 75$ e $g(t) = 2^{t+1} + 139$, em que t é o tempo, em anos, e as expressões $f(t)$ e $g(t)$ representam o número de indivíduos desses vilarejos, respectivamente. Considerando o instante atual como instante zero, os gráficos de $f(t)$ e $g(t)$ são formados por pontos das curvas indicadas a seguir por f e g , respectivamente (essas curvas não são os próprios gráficos das funções, pois $f(t)$ e $g(t)$ só podem assumir valores naturais).



a) Determine os valores a e b na figura, coordenadas do ponto comum a f e g ;

b) Daqui a quantos anos os dois vilarejos terão o mesmo número de indivíduos?

c) Daqui a 7 anos, qual será o número de indivíduos do vilarejo **A**?

d) Calcule a taxa média de variação de cada uma das funções f e g , quando t varia de 2 a 4 anos.

Q4. (C5/V1/q.30/p.232) Se o trabalho no campo não atende às necessidades mínimas de sobrevivência, o camponês se vê obrigado a procurar melhores condições de vida nas cidades, causando, assim, o chamado êxodo rural. É o fenômeno que tem ocorrido em uma determinada região do país. Assim, por meio de uma curva de tendência, os técnicos de um instituto de Geografia e Estatística concluíram que a população P dessa região, em milhares de habitantes, daqui a t anos, pode ser estimada pela função $P(t) = \frac{1560}{3+5 \cdot 2^{0,5t}}$. Responda: **a)** Qual é a estimativa da população atual dessa região? **b)** Qual é a estimativa da população dessa região daqui a 1 ano? **c)** E daqui a 2 anos? **d)** Supondo que essa estimativa continue válida por tempo suficiente, daqui a quantos anos a população dessa região será estimada em 36 mil habitantes?

Q5. (C6/V1/q.17/p.158) Segundo a *lei de resfriamento de Newton*, a temperatura de um corpo diminui exponencialmente. Por exemplo, sob certas condições, a temperatura T de batatas assadas, após saírem do forno, em graus Celsius, é dada por $T(t) = 20 + 160 \cdot e^{-6t}$, em que t é o tempo decorrido, em horas. **a)** Qual era a temperatura das batatas quando saíram do forno? **b)** Qual a temperatura das batatas 6 minutos após saírem do forno? **c)** E após 10 minutos? **d)** Em quanto tempo a temperatura das batatas será 28 °C? **e)** Qual a menor temperatura essas batatas podem atingir? **f)** O que significa isso?

Q6. (ENEM – 2015) O sindicato de trabalhadores de uma empresa sugere que o piso salarial da classe seja de R\$ 1800,00, propondo um aumento percentual fixo por cada ano dedicado ao trabalho. A expressão que corresponde à proposta salarial s , em função do tempo de serviço t , em anos, é $s(t) = 1800 \cdot (1,03)^t$. **a)** Qual a taxa percentual de aumento do salário desses trabalhadores? **b)** De acordo com a proposta do sindicato, qual será o salário de cada profissional dessa empresa com 2 anos de tempo de serviço? **c)** E com 10 anos? **d)** Em quanto tempo o salário de um trabalhador dessa empresa dobrará?





CAPÍTULO 4

CC4 - LOGARITMOS

Situação 4.1: Crianças em crescimento!

1ª Etapa: Apresentação da situação-problema

(PAIVA, 2016a, p. 258, adaptado). Um médico pediatra, após registrar por vários anos o crescimento de pacientes com idades de 1 a 12 anos, ajudado por um colega matemático, chegou à seguinte fórmula:

Modelo 14

$$10^{h-0,7} = \sqrt{i}$$

Sendo h a altura média da criança (em metros) e i , a idade (em anos).

Figura 8 - Médico Pediatra em uma consulta de rotina



Fonte: <https://www.douradosagora.com.br/brasil-mundo/ciencia-saude/doencas-respiratorias-lotam-postos-pediatra-orienta-a-prevencao>.

Identificando Variáveis a partir da Situação 4.1

- A fórmula apresentada (Modelo 14) indica duas grandezas. Quais são elas?
- Que variáveis representam essas grandezas?

2ª Etapa: Exploração e interpretação

Possíveis questões a partir da Situação 4.1

- Que tipo de equação é essa (Modelo 8)?
- Que conteúdo matemático envolve nesse modelo?
- É possível exibir de modo explícito cada uma das variáveis indicadas na fórmula? Se sim, como seriam essas expressões?
- Essa fórmula está em conformidade com as informações encontradas na Caderneta de Saúde da Criança? Etc.

Sugestão de primeiras Ações Exploratórias ...

Tarefa 1: Ações Exploratórias a partir da Situação 4.1

- 1) Usando a fórmula apresentada (Modelo 14), qual a idade aproximada de uma criança de 0,9 m? (Use uma calculadora científica).
- 2) Usando a fórmula apresentada (Modelo 14), qual a idade aproximada de uma criança de 1,0 m? (Use uma calculadora científica).
- 3) Usando a fórmula apresentada (Modelo 14), qual a altura média aproximada de uma criança de 1 ano de idade?
- 4) Usando a fórmula apresentada (Modelo 14), qual a altura média aproximada de uma criança de 10 anos de idade?
- 5) Dados sobre altura e idade de crianças, encontrados na Caderneta de Saúde da Criança (CSC) podem ser considerados um modelo matemático. Pesquise em uma CSC esses dados e compare com dados encontrados a partir do modelo aqui apresentado (Modelo 14). Que conclusões você pode tirar dessa comparação? Etc.

3ª Etapa: Desenvolvimento do conteúdo curricular e Resolução

Sugestão de Discussões em torno da Situação 4.1

- Oportunizar aos estudantes que apresentem as estratégias de desenvolvimento da tarefa (Tarefa 1).
- Discutir as facilidades e dificuldades na realização da tarefa (Tarefa 1).
- Dialogar com os estudantes detalhadamente acerca da situação proposta no item 5) da tarefa (Tarefa 1).
- A partir da fórmula $10^{h-0,7} = \sqrt{i}$ o professor pode propor aos estudantes que calculem a altura de uma criança de 9 anos de idade. A intenção é chegar à equação exponencial $10^{h-0,7} = 3$ e discutir o fato de não poder reduzir os dois lados desta à mesma base. O professor pode expressar a equação de modo

Nesse momento, o professor tem autonomia para desenvolver, em diálogo com os estudantes, o **conteúdo curricular** que evidencie o modelo geral em estudo e dê conta dos questionamentos levantados. Além disso, outras situações que se utilizam do modelo geral apresentado, podem ser evidenciadas e discutidas no grupo.

Sugestão de outras Ações Exploratórias ...

Tarefa 2: Ações Exploratórias a partir da **Situação 4.1**

- 1) Calcule a altura de uma criança de 5 anos de idade (usar calculadora científica para expressar os logaritmos).
- 2) Calcule a altura de uma criança de 8 anos de idade (usar calculadora científica).
- 3) Por meio da fórmula apresentada (Modelo 14), quanto você acha que pode ser a altura máxima de uma criança? Explique seu raciocínio.
- 4) Como vimos, a fórmula apresentada (Modelo 14) é válida para crianças de 1 a 12 anos de idade. No entanto, uma criança de 12 anos, tanto pode ter acabado de fazer 12 anos ou ter quase 13 anos. Como você analisa essa situação? Explique seu raciocínio. Etc.

4ª Etapa: Aplicação

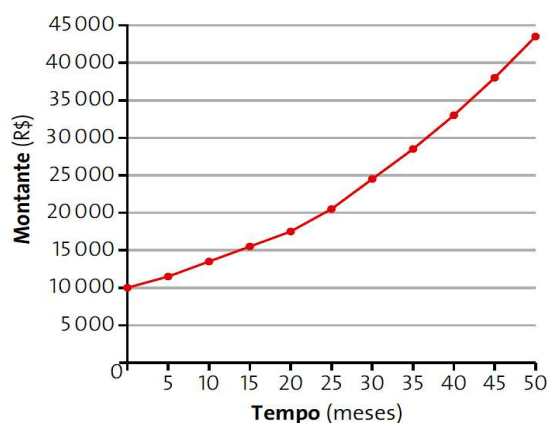
Questões de Aplicação são sugeridas no final da seção.

Situação 4.2: Ainda tá precisando de dinheiro emprestado?

1ª Etapa: Apresentação da situação-problema

(DANTE, 2016a, p. 149). Lembra do empréstimo bancário que Ana fez? (**Situação 3.2**) Ela estava precisando com urgência de R\$ 10 000,00, e resolveu fazer um empréstimo pessoal. Para sua “sorte”, encontrou um banco que ofereceu taxa de juros de 3% ao mês para que ela pagasse ao final de 3 meses. Vimos que se a dívida tivesse que ser paga ao final de t meses, a expressão matemática do montante dessa dívida foi dada por $M = 10000(1,03)^t$. A partir dessa expressão matemática, foi feita uma projeção da dívida para um período de 50 meses e obteve-se o seguinte gráfico:

Modelo 15



Fonte: Dante (2016a, p. 149).

Identificando Variáveis a partir da Situação 4.2

- A expressão matemática apresentada (Modelo 15) indica algumas grandezas. Quais são elas?
- Que variáveis representam essas grandezas?

2ª Etapa: Exploração e interpretação

Possíveis questões a partir da Situação 4.2

- Analisando o gráfico (Modelo 15), o que se percebe no crescimento da dívida no decorrer do tempo? É um crescimento linear?
- De acordo com o gráfico (Modelo 15), em quanto tempo o montante a ser pago por essa dívida dobra? Em quanto tempo triplica? Em quanto tempo quadruplica?
- Se não tivesse o gráfico, apenas a expressão matemática $M = 10000(1,03)^t$, como prever esses tempos em que o montante da dívida dobra, triplica ou quadruplica?

Sugestão de primeiras Ações Exploratórias ...

Tarefa 1: Ações Exploratórias a partir da **Situação 4.2**

- 1) A partir da observação do gráfico, em quanto tempo (aproximadamente) o montante a ser pago pela dívida de R\$ 10 000,00 dobra? Em quanto tempo triplica? Em quanto tempo quadruplica?
- 2) A partir do gráfico, qual o montante a ser pago por Ana se a dívida fosse quitada ao final de 5 meses? E se fosse quitada ao final de 10 meses? E ao final de 15 meses? E ao final de 18 meses? E 36 meses? E 43 meses?
- 3) Compare os resultados do item anterior com resultados obtidos a partir do modelo $M = 10000(1,03)^t$. Etc.

3ª Etapa: Desenvolvimento do conteúdo curricular e Resolução

Sugestão de Discussões em torno da **Situação 4.2**

- Oportunizar aos estudantes que apresentem as estratégias de desenvolvimento da tarefa (Tarefa 1).
- Discutir as facilidades e dificuldades na realização da tarefa (Tarefa 1).
- O professor pode instigar os estudantes a resolverem do item 3) da Tarefa 1, desconsiderando o gráfico (Modelo 15), mas utilizando, para isso, apenas o modelo $M(t) = 10\,000 \cdot (1,03)^t$. A intenção é chegar às equações exponenciais $(1,03)^t = 2$, $(1,03)^t = 3$ e $(1,03)^t = 4$, que potencializem a realização de cálculos experimentais (aproximações de t) para resolver essas equações. E assim, seja evidenciada a necessidade dos *logaritmos*.

Nesse momento, o professor tem autonomia para desenvolver, em diálogo com os estudantes, o **conteúdo curricular** que evidencie o modelo geral em estudo e dê conta dos questionamentos levantados. Além disso, outras situações que se utilizam do modelo geral apresentado, podem ser evidenciadas e discutidas no grupo.

Sugestão de outras Ações Exploratórias ...

Tarefa 2: Ações Exploratórias a partir da **Situação 4.2**

- 1) Usando uma calculadora científica, considerando apenas o modelo matemático $M(t) = 10\,000 \cdot (1,03)^t$ e, baseado nos conhecimentos sobre logaritmos estudados, em quanto tempo o montante da dívida de Ana:
 - a) Dobra? b) Triplica? c) Quadruplica?
- 2) Nas mesmas condições do item anterior, em quanto tempo (aproximadamente) o montante da dívida chegaria a R\$ 23 500,00?
- 3) Realize a mesma ação do item anterior, considerando que o montante da dívida seja R\$ 34 055,00. Etc.

4ª Etapa: Aplicação

Questões de Aplicação são sugeridas no final da seção.

Situação 4.3: Voltando a falar de Radioatividade!

1ª Etapa: Apresentação da situação-problema

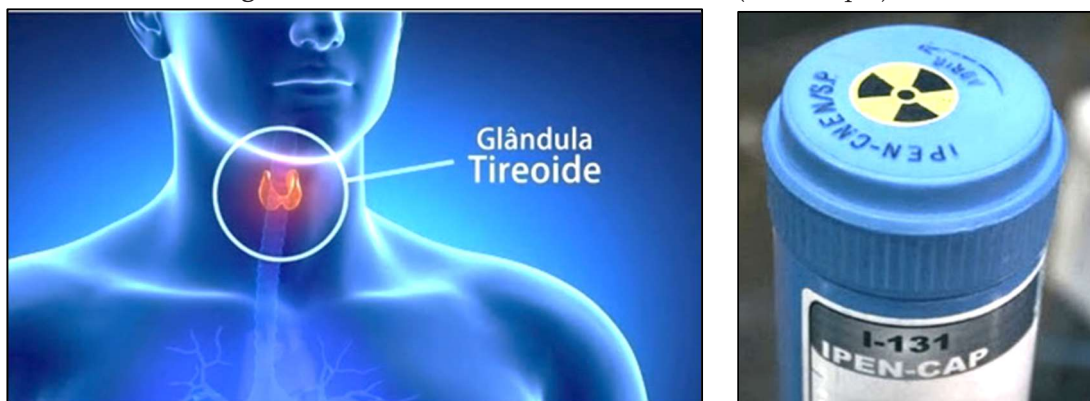
(DANTE, 2016a; IEZZI et al., 2016a; SMOLE; DINIZ, 2016a). Como foi visto anteriormente (**Situação 3.3**), a radioatividade é um fenômeno que, essencialmente, faz com que uma substância ou elemento radioativo emita energia sob forma de radiação (ondas eletromagnéticas ou partículas de alta energia), transformando-se em uma outra substância com propriedades físicas e químicas diferentes. O período de atividade dessas substâncias tem um “tempo de vida”, pois a radioatividade cai exponencialmente com o passar do tempo, diminuindo seu alcance e “poder”. Esse decaimento é calculado matematicamente pela função exponencial $y = f(t)$ dada por

Modelo 16

$$y = y_0 e^{-kt}$$

Vimos também que o tempo necessário para que a atividade radioativa seja reduzida à metade chama-se **meia-vida**. O diferencial entre as substâncias radioativas, além da quantidade analisada, naturalmente, está no tempo t . Algumas delas atingem a meia-vida em segundos, como o tecnécio-99, muito utilizado na medicina, enquanto outras levam milhões de anos, como o urânio-238. O cálculo da meia-vida de uma substância radioativa é, portanto, um processo de bastante importância, com variedade de aplicações e/ou investigações que dele dependem. Um exemplo são os exames diagnósticos e terapia específica para o tratamento de câncer de tireoide, para os quais a medicina nuclear utiliza iodo radioativo (iodo-131), cuja meia-vida é de 8 dias.

Figura 9 - Tratamento do câncer de tireoide (Iodoterapia)



Fonte: <https://br.pinterest.com/pin/492581277990862764/> e <http://radiologia.blog.br/medicina-nuclear/o-que-sao-radiofarmacos-e-suas-aplicacoes>.

Um outro exemplo é o método que determina a idade de seres que viveram muito tempo atrás, conhecido como *datação pelo carbono-14* (C-14). As plantas, animais e demais seres vivos recebem o C-14 por meio do alimento e da água e mantêm um nível constante desse elemento em sua estrutura. Enquanto existir vida, a porcentagem de C-14 no organismo dos seres vivos será igual à porcentagem presente na atmosfera. Quando ocorre a morte de um ser vivo, esse equilíbrio termina e o percentual de C-14 presente nele começa a decair ($y = y_0 e^{-kt}$).

Figura 10 - Datação de fósseis pelo carbono-14



Fonte: <https://www.altoastral.com.br/como-se-formam-os-fosseis/>, <https://www.haaretz.com/archaeology/.premium-fossils-offer-grim-proof-of-earliest-war-1.5257108>, https://pt.wikipedia.org/wiki/Madeira_petrificada.

Como a meia-vida do C-14 é aproximadamente de 5730 anos, medindo a quantidade de carbono presente em uma amostra do espécime em análise, a estimativa da idade pode ser feita com certa precisão.

Identificando Variáveis a partir da Situação 4.3

- A fórmula apresentada (Modelo 16) indica algumas grandezas. Quais são elas?
- Que variáveis representam essas grandezas.

2ª Etapa: Exploração e interpretação

Possíveis questões a partir da Situação 4.3

- Usando o modelo matemático $y = y_0 e^{-kt}$, como calcular a meia-vida de uma substância radioativa a partir dessa expressão?
- No caso do carbono-14, qual sua taxa de decaimento?
- Como calcular, por exemplo, a idade de um pergaminho descoberto atualmente com cerca de 80% da quantidade de C-14 encontrada na matéria viva?
- Quando estudamos função exponencial, vimos o desastre ocorrido em Goiânia em 1987 com o cézio-137. Foi visto que o lugar onde ocorreu esse acidente só poderá ser habitado novamente quando o nível de radiação de cézio-137 for reduzido, por desintegração, a apenas 3% da quantidade inicial. Como calcular esse tempo (contado a partir de 1987), sabendo que a desintegração radioativa do cézio-137 pode ser expressa pelo modelo $y = y_0 e^{-kt}$? Etc.

Sugestão de primeiras Ações Exploratórias ...

Tarefa 1: Ações Exploratórias a partir da **Situação 4.3**

- 1) Considerando que a massa radioativa de uma substância química pode ser modelada pela função $y = y_0 e^{-0,04t}$, qual sua taxa de desintegração (em anos)?
- 2) Que porcentagem remanescente de massa radioativa podemos encontrar na substância do item anterior após 10 anos de desintegração? E após 20 anos?
- 3) Para calcular a meia-vida da substância do item 1), que estratégia você usaria para fazer isso? Etc.

3ª Etapa: Desenvolvimento do conteúdo curricular e Resolução

Sugestão de Discussões em torno da **Situação 4.3**

- Oportunizar aos estudantes que apresentem as estratégias de desenvolvimento da tarefa (Tarefa 1).
- Discutir as facilidades e dificuldades na realização da tarefa (Tarefa 1).
- Para auxiliar os estudantes no desenvolvimento do item 3) (Tarefa 1), o professor pode orientá-los para que cheguem à equação $e^{-0,04t} = 0,5$. O professor pode simplificar essas equações, expressando-as na forma $e^x = 0,5$, ao fazer a substituição $x = -0,04t$. O objetivo é tentar evidenciar valores aproximados de x (consequentemente de t) que resolva essa equação.
- Evidenciar a necessidade dos logaritmos.

Nesse momento, o professor tem autonomia para desenvolver, em diálogo com os estudantes, o **conteúdo curricular** que evidencie o modelo geral em estudo e dê conta dos questionamentos levantados. Além disso, outras situações que se utilizam do modelo geral apresentado, podem ser evidenciadas e discutidas no grupo.

Sugestão de outras Ações Exploratórias ...

Tarefa 2: Ações Exploratórias a partir da **Situação 4.3**

- 1) Sabe-se que um fragmento de pergaminho, descoberto em 1950 nas cavernas de *Qumran*, no Mar Morto, tinha cerca de 80% da quantidade de carbono-14 encontrado na matéria viva.
 - a) Evidencie a expressão matemática $y = y_0 e^{-kt}$ (com o valor de k) do decaimento de C-14 para esse pergaminho.
 - b) Calcule a idade aproximada desse pergaminho (use calculadora científica)
- 2) Sabe-se que o cézio-137, elemento radioativo que causou um acidente catastrófico na cidade de Goiânia em 1987, tem meia-vida de 30 anos. Calcule em quanto tempo o lugar (na cidade de Goiânia) onde ocorreu o acidente radioativo com cézio-137 poderá ser habitado novamente, sabendo que isso só ocorrerá quando o nível de radiação de cézio-137 for reduzido, por desintegração, a apenas 3% da quantidade inicial (usar calculadora científica). Etc.

4ª Etapa: Aplicação

Sugestão de Questões de Aplicação referentes ao CC4

Q1. (C3/V1/q.26/p.197) Pesquisa feita por biólogos de reserva florestal mostrou que a população de uma certa espécie de animal está diminuindo a cada ano. A partir do ano em que se iniciou a pesquisa, o número de exemplares desses animais é dado aproximadamente pela função $f(t) = 750 \cdot 2^{-0,09t}$, com t em anos, $t \geq 0$. **a)** Com base nessa função, determine em quantos anos a população de animais estará reduzida à metade da população inicial; **b)** Supondo que nada seja feito para conter o decréscimo da população, em quantos anos, de acordo com a função, haverá somente 200 exemplares dessa espécie de animal na reserva? **c)** E 100?

Q2. (C2/V2/q.22/p.141) Grande parte dos brasileiros guarda suas reservas financeiras na caderneta de poupança. O rendimento líquido anual da caderneta de poupança gira em torno de 6%. Isso significa que, a cada ano, o saldo dessa poupança cresce 6% em relação ao saldo do ano anterior. **a)** Expresse a expressão matemática que permite calcular o montante y de um capital inicial y_0 aplicado a essa taxa de 6% de juros durante um período de x anos; **b)** Nessas condições, se Maria aplicou hoje R\$ 2000,00 na poupança, qual o saldo (montante) em cinco anos? **c)** Em quanto tempo Maria terá um montante de R\$ 2500,00? **d)** E R\$ 3000,00? **e)** Em quanto tempo o montante de Maria será o dobro do valor aplicado inicialmente?

Q3. (C4/V1/q.48/p.173) Uma represa de 2500 m^2 de superfície utilizada para *piscicultura* (criação de peixes) foi invadida por certa espécie de vegetação aquática. Como ela estava prejudicando o crescimento dos peixes, o proprietário contratou especialistas para realizarem um estudo. Ao analisar os 50 m^2 já invadidos pela vegetação, concluiu-se que, se nenhuma providência fosse tomada, a vegetação aquática aumentaria 35% ao ano. **a)** Escreva a expressão matemática que evidencia a área invadida A (em m^2) em função do tempo t (em anos), considerando que o proprietário não tome qualquer providência; **b)** Nessas condições, qual a área invadida dessa represa em cinco anos? **c)** Em quanto tempo a vegetação invadirá a metade da reserva? **d)** Em quantos anos (aprox.) a vegetação tomará completamente a reserva?

Q4. (C4/V1/q.50/p.173) Um dos maiores acidentes nucleares da história aconteceu em 1986 na central atômica de Chernobyl, localizada na cidade de Prypiat, Ucrânia (antiga União Soviética). Nesse acidente, houve uma explosão, contaminando com radiação acima do índice máximo tolerado uma região de cerca de $160\,000\text{ km}^2$. A cidade de Prypiat foi abandonada às pressas, o que a tornou uma “cidade fantasma”. Milhares de pessoas contaminadas pela radioatividade continuam morrendo, principalmente em decorrência de câncer. Com a explosão, foram liberados na atmosfera vários elementos radioativos, entre eles o estrôncio-90, cuja meia-vida é de cerca de 28 anos.

Central nuclear de Chernobyl, Ucrânia



1986



2011

Sabe-se que a quantidade y de átomos radioativos remanescente no ambiente diminui conforme o modelo exponencial $y = y_0 \cdot e^{-kt}$, em que y_0 é a quantidade inicial, k é uma constante positiva que expressa a taxa de decaimento e t é o tempo em anos. **a)** Calcule o valor de k para o caso do estrôncio-90 e dê a expressão matemática $y = f(t)$; **b)** Atualmente qual a porcentagem de átomos radioativos de estrôncio-90 se encontra lá na região de Chernobyl? **c)** Considerando uma massa de 700 g de estrôncio-90 lançada na atmosfera de Chernobyl, quanto tempo aproximadamente é necessário para que essa massa se reduza a 50 g ? **d)** A região específica onde ocorreu o acidente só pode ser habitado novamente com certa segurança quando a porcentagem remanescente desse elemento radioativo for de 3%. Quando isso poderá ocorrer?

Q5. (ENEM - 2011) A Escala de Magnitude de Momento (abreviada com MMS e denotada com M_w), introduzida em 1979 por Thomas Haks e Hiroo Kanamori, substituiu a Escala de Richter para medir a magnitude dos terremotos em termos de energia liberada. Menos conhecida pelo público, a MMS é, no entanto, a escala usada para estimar as magnitudes de todos os grandes terremotos da atualidade. Assim como a escala Richter, a MMS é uma escala logarítmica, sendo que M_w e M_0 se relacionam pela fórmula $M_w = -10,7 + \frac{2}{3}\log(M_0)$, onde M_0 é o momento sísmico (usualmente estimado a partir dos registros de movimento da superfície, através dos sismogramas), cuja unidade é o *dina · cm*. O terremoto de Kobe (17/01/1995) foi um dos que causou grande impacto no Japão e na comunidade científica internacional. Teve magnitude $M_w = 7,3$. Assim, utilizando o modelo acima ($M_w = -10,7 + \frac{2}{3}\log(M_0)$), qual foi o momento sísmico M_0 do terremoto de Kobe (em *dina · cm*)?

Q6. (ENEM – 2016) Em 2011, um terremoto de magnitude 9,0 na escala Richter causou um devastador *tsunami* no Japão, provocando um alerta na usina nuclear de Fukushima. Em 2013, outro terremoto, de magnitude 7,0 na mesma escala, sacudiu Sichuan (sudeste da China), deixando centenas de mortos e milhares de feridos. A magnitude de um terremoto na escala Richter pode ser calculada pela expressão matemática $M = \frac{2}{3} \log(E/E_0)$, sendo E a energia, em kWh , liberada pelo terremoto e E_0 uma constante real positiva. Considere que E_1 e E_2 representam as energias liberadas nos terremotos ocorridos no Japão e na China, respectivamente. **a)** Evidencie a expressão matemática da escala Richter para cada um desses terremotos; **b)** Qual a relação entre E_1 e E_2 ?



CAPÍTULO 5

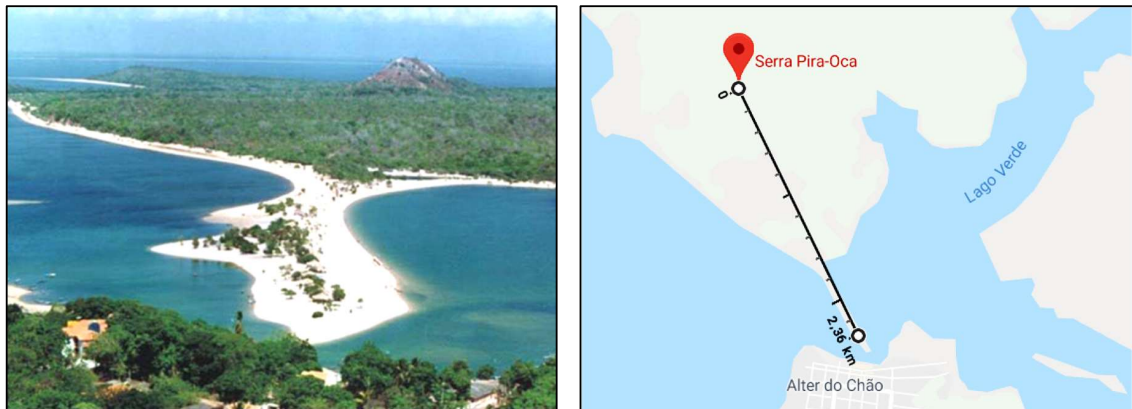
CC5 - TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Situação 5.1: Você conhece a serra Pira-Oca em Ater-do-Chão?

1ª Etapa: Apresentação da situação-problema

(DANTE, 2016a, p. 235, adaptado). João, professor de Matemática do Ensino Médio de uma escola estadual de Santarém, com o “único objetivo de ensinar *Trigonometria*” a uma turma de estudantes, resolveu levá-los a Alter-do-Chão numa excursão de estudo e pesquisa. Na vila, como se sabe, há muitas atrações naturais que podem ser exploradas pelos visitantes. Uma dessas atrações é o morro *Pira-Oca*, mais conhecido como “serra Piroca”, que fica ao fundo, na região da *ilha do amor*, acerca de **2,36 km** de um ponto no início da praia (figura abaixo).

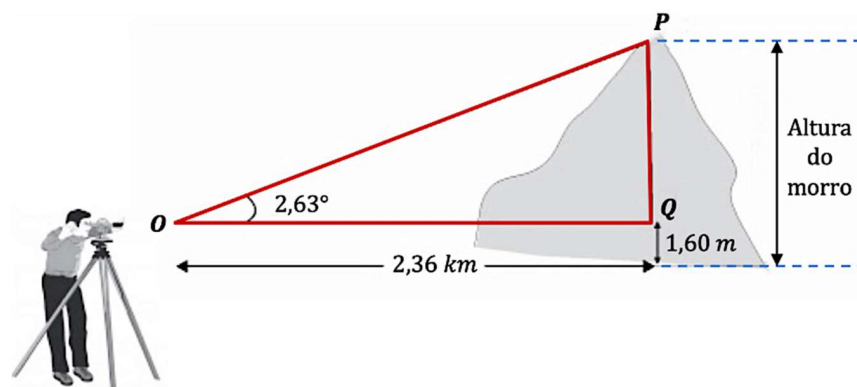
Figura 11 - Praia de Alter-do-Chão - Ilha do amor



Fonte: <https://br.pinterest.com/pin/59391288811206351/?nic=1> e Google Maps.

Uma das várias experiências realizadas nessa excursão foi o cálculo da altura do morro. Veja a figura a seguir.

Modelo 17



Fonte: Adaptado de <https://blogdoenem.com.br/matematica-como-construcao-da-humanidade-simulado-encceja/>.

Para realizar esse experimento, os alunos usaram um teodolito de **1,60 m** de altura (levado pelo professor), a distância **2,36 km** e calculadora científica. Fixado o teodolito na praia (ponto inicial), mediu-se o ângulo formado entre a reta horizontal

e a reta que passa pelo topo do morro, obtendo um ângulo de $2,63^\circ$. Com isso, formou-se um triângulo virtual $\triangle OPQ$ conforme indica a figura a seguir.

Identificando Variáveis a partir da Situação 5.1

- O modelo apresentado acima (Modelo 17) indica algumas grandezas. Quais são elas?
- Que variáveis você usaria para representar essas grandezas?

Observação: Para auxiliar os estudantes nessa identificação, o professor pode incentivá-los a perceber que o topo do morro é visto sob um ângulo de visão de $2,63^\circ$, que é um dos ângulos agudos do triângulo retângulo que representa a situação apresentada. A distância do observador até a base do morro é $2,36 \text{ km}$ e sua altura pode ser representada por h , que são, respectivamente, os catetos, adjacente e oposto do triângulo. A hipotenusa pode ser representada por x .

2ª Etapa: Exploração e interpretação

Possíveis questões a partir da Situação 5.1

- Ao posicionar o teodolito na praia, sua altura fica $1,50 \text{ m}$ do chão, representada pela pequena seta que vai do chão até o ponto M . Para determinar a altura do morro, então, basta calcular qual medida do triângulo?
- Para calcular essa medida (cateto oposto), pode ser usado o teorema de Pitágoras diretamente? Por quê?
- Qual a importância do ângulo ($2,63^\circ$) na resolução desse problema?
- Que conhecimento matemático pode ser usado para calcular a medida do cateto $\overline{MP}$?
- Você deve lembrar do estudo de trigonometria, estudado no 9º ano do Ensino Fundamental. Que conhecimentos de trigonometria você acha que podem ajudar a resolver esse problema? Explique. Etc.

Observação: Antes de propor a Tarefa 1 abaixo, o professor pode fazer uma breve revisão sobre triângulos, enfatizando as relações métricas num triângulo retângulo.

Sugestão de primeiras Ações Exploratórias ...

Tarefa 1: Ações exploratórias a partir da Situação 5.1

- 1) Usando calculadora científica, calcule o seno, cosseno e a tangente do ângulo $2,63^\circ$.
- 2) Identifique, no triângulo (Modelo 17), o ângulo oposto ao lado $2,36 \text{ km}$.
- 3) Usando uma calculadora científica, calcule o seno, cosseno e a tangente desse ângulo (item 2).
- 4) Pesquise a definição dessas razões trigonométricas (pesquisar na *internet* ou no livro didático). Etc.

3ª Etapa: Desenvolvimento do conteúdo curricular e Resolução**Sugestão de Discussões em torno da Situação 5.1**

- Oportunizar aos estudantes que apresentem as estratégias de desenvolvimento da tarefa (Tarefa 1).
- Discutir as facilidades e dificuldades na realização da tarefa (Tarefa 1).
- Após a realização do item 4) da Tarefa 1, o professor, em diálogo com os estudantes, pode propor que expressem as razões trigonométricas do ângulo $2,63^\circ$ presente no Modelo 17, comparando os resultados obtidos no item 1), da Tarefa 1. A intenção é fazer com que eles consigam expressar as identidades $\text{sen}(2,63^\circ) = \frac{h}{x}$, $\text{cos}(2,63^\circ) = \frac{2,36}{x}$ e $\text{tg}(2,63^\circ) = \frac{h}{2,36}$. Aqui o professor pode questionar qual das três identidades pode ser utilizada para calcular a altura do morro (h). Destacar a necessidade de se conhecer as razões trigonométricas para resolver problemas desse tipo.
- Evidenciar a necessidade do novo conteúdo.

Nesse momento, o professor tem autonomia para desenvolver, em diálogo com os estudantes, o **conteúdo curricular** que evidencie o modelo geral em estudo e dê conta dos questionamentos levantados. Além disso, outras situações que se utilizam do modelo geral apresentado, podem ser evidenciadas e discutidas no grupo.

Sugestão de outras Ações Exploratórias ...**Tarefa 2: Ações Exploratórias a partir da Situação 5.1**

- 1) A partir do modelo apresentado (Modelo 17) e usando os conhecimentos adquiridos sobre trigonometria, calcule a altura do morro.
- 2) Calcule a hipotenusa do triângulo (Modelo 17).
- 3) Suponha que o teodolito seja deslocado do ponto onde está fixado na direção do morro até um segundo ponto onde o ângulo de visão do topo do morro seja 10° . Qual deverá ser a distância entre esses dois pontos?
- 4) Suponha agora que o teodolito seja deslocado 500 m do ponto onde está fixado na direção do morro até um segundo ponto. Qual deverá ser o ângulo de visão do topo do morro nesse ponto? Etc.

4ª Etapa: Aplicação

Questões de Aplicação são sugeridas no final da seção.

Situação 5.2: Santarém e o Encontro das Águas... que bela vista!

1ª Etapa: Apresentação da situação-problema

(IEZZI et al., 2016a, p. 222; SMOLE; DINIZ, 2016a, p. 243, adaptado). De volta à Santarém, o professor João e seus alunos, após terem resolvido o problema da altura da “serra Piroca” e vários outros problemas envolvendo Trigonometria no Triângulo Retângulo, desceram do ônibus em frente ao Mercado 2000. Justamente nesse momento, estava saindo um barco indo em direção à Ponta Negra, e uma das alunas questionou: “Será que dá pra calcular a distância daqui (tablado) até lá (Ponta Negra) usando o que a gente aprendeu de Trigonometria?” Ela mesma respondeu de imediato: “dá sim!”.

Figura 12 - Cidade de Santarém – encontro das águas (rios Tapajós e Amazonas)



Fonte: <https://www.brasilturismo.com/pa/santarem> e Google Maps.

A figura acima (à direita) representa o que os estudantes fizeram.

Modelo 18 Marcaram dois pontos (A e B) numa reta imaginária passando sobre a Orla, com distância de 1,0 km entre eles. O ponto A, indicava o lugar de onde saiu o barco e o ponto B, o Porto de Embarque Lancha Tapajós. A Ponta Negra foi representada com o ponto C, e com o teodolito do professor João mediram os ângulos $B\hat{A}C$ e $A\hat{B}C$, encontrando 60° e 90° , respectivamente.

Identificado Variáveis a partir da Situação 5.2

- No modelo apresentado (Modelo 18), tradução da figura 13, podemos identificar algumas grandezas. Quais são elas?
- Que variáveis você indicaria para representar essas grandezas?

Observação: Para auxiliar os estudantes nessa identificação, o professor pode incentivá-los a perceber que a distância do tablado (ponto A) até a Ponta Negra (ponto C) pode ser representada por x . A medida do lado adjacente ao ângulo 60° do triângulo é $1,0\text{ km}$, que é a distância do tablado (ponto A) até o Porto de Embarque Tapajós (ponto B). A distância de B a C pode ser representada por y .

2ª Etapa: Exploração e interpretação

Possíveis questões a partir da Situação 5.2

- Que tipo de triângulo é esse (Figura 13)?
- O que representa a medida x no triângulo retângulo construído ($\triangle ABC$)?
- A distância que queremos calcular ($\overline{AC}$) representa o que desse triângulo? E $\overline{AB}$?
- Para calcular $\overline{AC}$, pode ser usado o teorema de Pitágoras diretamente? Por quê?
- Qual a importância dos ângulos (60° e 90°) na resolução desse problema?
- Que conhecimento matemático pode ser usado para calcular o cateto $\overline{MP}$?
- Você deve lembrar do estudo de trigonometria, estudado no 9º ano do Ensino Fundamental. Que conhecimentos de trigonometria você acha que podem ajudar a resolver esse problema? Explique. Etc.

Observação: Antes de propor a Tarefa 1 abaixo, o professor pode fazer uma breve revisão sobre triângulos, enfatizando as relações métricas num triângulo retângulo.

Sugestão de primeiras Ações Exploratórias ...

Tarefa 1: Ações exploratórias a partir da Situação 5.2

- 1) Usando calculadora científica, calcule o seno, cosseno e a tangente do ângulo 60° .
- 2) Identifique, no triângulo (Figura 13), o ângulo oposto ao lado $1,0\text{ km}$.
- 3) Usando uma calculadora científica, calcule o seno, cosseno e a tangente desse ângulo (item 2).
- 4) Pesquise a definição dessas razões trigonométricas (pesquisar na *internet* ou no livro didático). Etc.

3ª Etapa: Desenvolvimento do conteúdo curricular e Resolução

Sugestão de Discussões em torno da Situação 5.2

- Oportunizar aos estudantes que apresentem as estratégias de desenvolvimento da tarefa (Tarefa 1).
- Discutir as facilidades e dificuldades na realização da tarefa (Tarefa 1).
- Após a realização do item 4) da Tarefa 1, o professor, em diálogo com os estudantes, pode propor que expressem as razões trigonométricas do ângulo 60° presente na Figura 13, comparando os resultados obtidos no item 1), da Tarefa 1. A intenção é fazer com que eles consigam expressar as identidades $\sin(60^\circ) = \frac{h}{x}$, $\cos(60^\circ) = \frac{1,0}{x}$ e $\text{tg}(60^\circ) = \frac{h}{1,0}$. Aqui o professor pode questionar qual das três identidades pode ser utilizada para calcular a altura do morro (h). Destacar a necessidade de se conhecer as razões trigonométricas para resolver problemas desse tipo.
- Evidenciar a necessidade do novo conteúdo.

Nesse momento, o professor tem autonomia para desenvolver, em diálogo com os estudantes, o **conteúdo curricular** que evidencie o modelo geral em estudo e dê conta dos questionamentos levantados. Além disso, outras situações que se utilizam do modelo geral apresentado, podem ser evidenciadas e discutidas no grupo.

Sugestão de outras Ações Exploratórias ...

Tarefa 2: Ações Exploratórias a partir da Situação 5.2

- 1) Calcule a distância percorrida pelo barco desde o tablado do Mercado 2000 até a Ponta Negra.
- 2) Calcule a largura do Rio Tapajós na frente da cidade de Santarém (faça uso de calculadora científica). Etc.

4ª Etapa: Aplicação

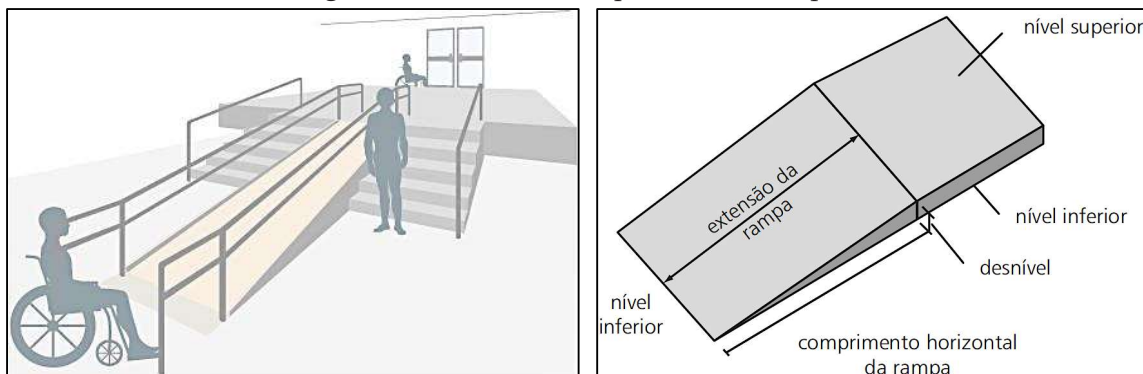
Questões de Aplicação são sugeridas no final da seção.

Situação 5.3: Acessibilidade... direito de ir e vir!

1ª Etapa: Apresentação da situação-problema

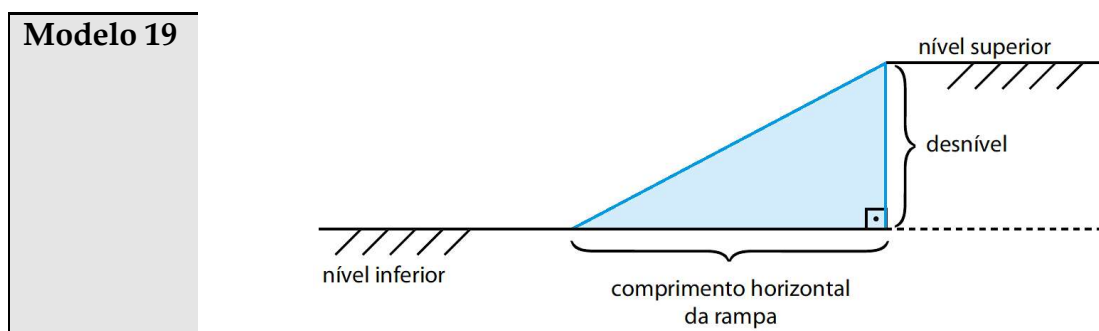
(DANTE, 2016a, p. 263; IEZZI et al., 2016a, p. 218). A questão da acessibilidade nas cidades é um desafio para o poder público. De acordo com a Norma Brasileira nº 9050, de 2004, da Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT), uma pessoa com mobilidade reduzida é aquela que, por qualquer motivo, tem dificuldade de se movimentar, mesmo não sendo portadora de deficiência. Para que todas as pessoas, deficientes ou não, possam frequentar os mesmos lugares e usufruir dos mesmos bens e serviços, é necessária a implantação de meios que possibilitem o acesso de pessoas com restrição de mobilidade. De acordo com a ABNT, a declividade das rampas com o plano horizontal deve variar de 5% a 8,33%. A fim de implementar as políticas inclusivas, a ABNT criou normas para acessibilidade arquitetônica e urbanística. Entre elas estão as de construção de rampas de acesso, como mostra a figura abaixo:

Figura 13 - Acessibilidade por meio de rampas



Fonte: <https://minutoacessivel.blogspot.com/2017/04/um-lugar-para-todos.html> e IEZZI et al. (2016a, p. 215).

A **declividade** (inclinação) de uma rampa pode ser entendida como a razão (divisão) entre o desnível a ser vencido e o comprimento horizontal da rampa (figura abaixo):



Fonte: IEZZI et al. (2016a, p. 216).

Identificando Variáveis a partir da Situação 5.3

- O modelo apresentado (Modelo 19) indica algumas grandezas. Quais são elas?
- Que variáveis você utilizaria para representar essas grandezas?

2ª Etapa: Exploração e interpretação**Possíveis questões a partir da Situação 5.3**

- O que significa uma *declividade* de 5%?
- Note que a declividade envolve lados de um triângulo. Que tipo de triângulo é esse? Como chamam os lados desse tipo de triângulo?
- Note que a declividade da rampa envolve o *ângulo* formado entre o comprimento da rampa e o comprimento horizontal da rampa. Em relação a esse ângulo, como pode ser definida a *declividade* usando os lados do triângulo?
- Essa definição é conhecida como uma das três *razões trigonométricas* fundamentais (Seno, Cosseno e Tangente), você sabe como se chama?
- Qual a definição de cada uma dessas razões trigonométricas?
- Como destacado no texto acima, de acordo com as normas de acessibilidade a declividade de uma rampa deve variar de 5% a 8,33%. Uma declividade de 5% corresponde a um ângulo de quantos graus? E 8,33%? Etc.

Observação: Antes de propor a Tarefa 1 abaixo, o professor pode fazer uma breve revisão sobre triângulos, enfatizando as relações métricas num triângulo retângulo, incentivando os estudantes a perceberem que um triângulo retângulo pode ser utilizado para representar a rampa, cujo comprimento (*a*) é a hipotenusa desse triângulo. O desnível a ser vencido na mesma (*c*) e o comprimento horizontal (*b*) são, respectivamente, os catetos oposto e adjacente ao ângulo θ (que é o ângulo formado pelos lados *a* e *b*). A declividade (inclinação) da rampa, definida pela razão entre as medidas *c* e *b*, pode ser expressa por $\frac{\text{Cateto Oposto } (c)}{\text{Cateto Adjacente } (b)}$.

Sugestão de primeiras Ações Exploratórias ...**Tarefa 1: Ações exploratórias a partir da Situação 5.3**

- 1) Se uma rampa tem altura (desnível) de 80 cm, encontrar seu comprimento horizontal, sabendo que a declividade é de 5%, 6,4%, 7,25% e 8,33% (evidenciar o conceito de *tangente* de um ângulo, que é a declividade da rampa).
- 2) Utilizando o Teorema de Pitágoras, calcular o comprimento da rampa (hipotenusa) nesses casos. Etc.

3ª Etapa: Desenvolvimento do conteúdo curricular e Resolução

Sugestão de Discussões em torno da Situação 5.3

- Oportunizar aos estudantes que apresentem as estratégias de desenvolvimento da tarefa (Tarefa 1).
- Discutir as facilidades e dificuldades na realização da tarefa (Tarefa 1).
- O professor, em diálogo com os estudantes, pode lembrá-los que cada inclinação (5%, 6,4%, 7,25% e 8,33%) apresentada na Tarefa 1 corresponde a *tangentes* de ângulos θ_1 , θ_2 e θ_3 , respectivamente. O professor pode propor aos estudantes que tentem expressar essa correspondência. A ideia é tentar chegar às identidades $tg(\theta_1) = 0,05$, $tg(\theta_2) = 0,064$, $tg(\theta_3) = 0,0725$ e $tg(\theta_4) = 0,0833$.
- Nesse momento, o professor pode questionar qual o valor dos ângulos em cada caso e evidenciar a necessidade de se conhecer o conceito de *arc-tangente*. Pode ainda destacar que existem outros tipos de razões (seno e cosseno) envolvendo os lados do triângulo, relacionados a esses ângulos.
- Evidenciar a necessidade do novo conteúdo.

Nesse momento, o professor tem autonomia para desenvolver, em diálogo com os estudantes, o **conteúdo curricular** que evidencie o modelo geral em estudo e dê conta dos questionamentos levantados. Além disso, outras situações que se utilizam do modelo geral apresentado, podem ser evidenciadas e discutidas no grupo.

Sugestão de outras Ações Exploratórias ...

Tarefa 2: Ações Exploratórias a partir da Situação 5.3

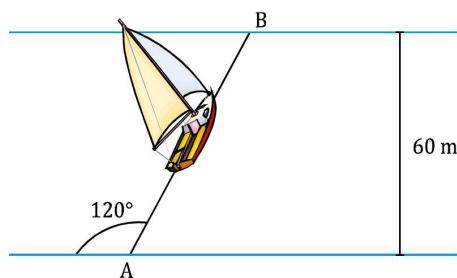
- 1) Utilizando uma calculadora científica, encontre os ângulos correspondentes às declividades de 5%, 6,4%, 7,25% e 8,33% de uma rampa (arc-tangente).
- 2) Calcule o seno e cosseno dos ângulos encontrado no item 1) (utilizar calculadora científica).
- 3) Utilizando os valores encontrados no item 2), qual sua opinião sobre a necessidade dessas razões trigonométricas no triângulo retângulo (seno e cosseno) para resolver o problema de calcular (de um modo diferente) o comprimento da rampa nos casos do item 1) da Tarefa 1? Etc.

4ª Etapa: Aplicação

Sugestão de Questões de Aplicação referentes ao CC5

Q1. (C3/V1/q.31/p.243) Em 2010 uma baixa história no nível das águas do rio Amazonas em sua parte peruana deixou o Estado do Amazonas em situação de alerta e a Região Norte na expectativa da pior seca desde 2005. Em alguns trechos, o rio Amazonas já não tem profundidade para que balsas com mercadorias e combustível para energia elétrica cheguem até as cidades. A Defesa Civil declarou situação de atenção em 16 municípios e situação de alerta – etapa imediatamente anterior à situação de emergência – em outros nove. Porém, alguns trechos do rio Amazonas ainda permitem plenas condições de navegabilidade.

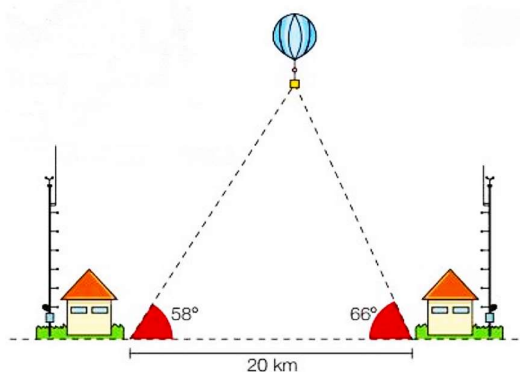
A figura ao lado ilustra o deslocamento de um barco que parte de um ponto A para atravessar o rio Amazonas. A direção desse deslocamento forma um ângulo de 120° com a margem do rio, sendo a largura do rio 60 m num trecho em que as margens são praticamente paralelas.



Baseado nesses dados, calcule a distância percorrida pela embarcação entre os pontos A e B.

Q2. (C4/V1/q.55/p.259) A partir de informações como umidade, temperatura e pressão atmosférica, os meteorologistas realizam previsões, com certa confiabilidade, das condições climáticas em determinada região, por certo período. Um dos instrumentos utilizados pelos meteorologistas para obter informações são os balões meteorológicos.

Em uma certa região estão localizadas duas estações meteorológicas, a 20 km uma da outra. De uma delas é possível avistar, em determinado instante, um balão meteorológico sob um ângulo de 58° em relação ao plano horizontal, e da outra pode-se avistar o balão, nesse mesmo instante, sob um ângulo de 66° , conforme a figura ao lado.



Qual a altura do balão em relação ao plano horizontal no instante dessas observações?

Q3. (C5/V2/q.17/p.49) Em plantas topográficas, uma curva de nível é uma linha imaginária formada por todos os pontos de igual altitude da região representada. Por exemplo, a figura 1 abaixo representa um morro onde são destacadas as curvas de nível de 30 m, 60 m e 90 m de altitude em relação ao nível do mar (0 m). A projeção ortogonal dessas curvas em um plano paralelo aos planos das curvas de nível é chamada mapa de curvas de nível. Para a construção do mapa, adota-se uma escala conveniente e costuma-se espaçar igualmente as altitudes representadas pelas curvas de nível. No exemplo abaixo elas foram espaçadas em 30 m.

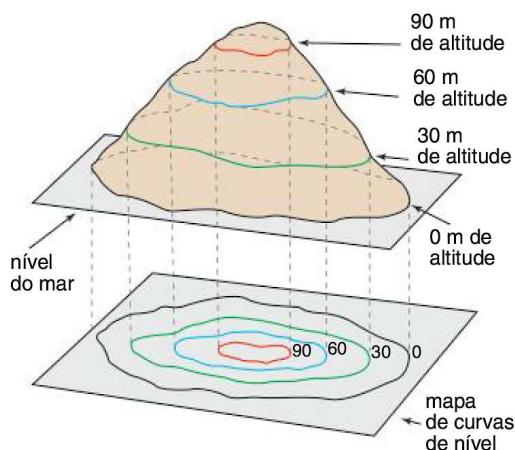


figura 1

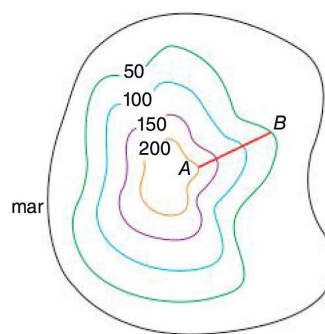
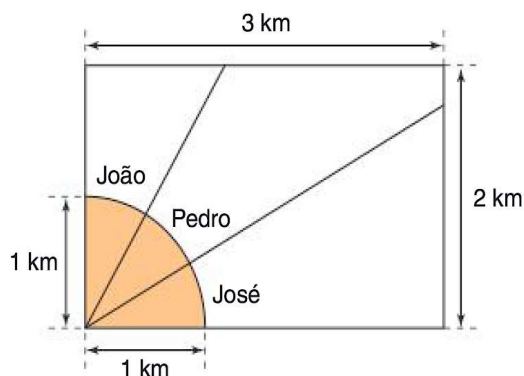


figura 2

De acordo com esses conceitos, considere que uma montanha foi representada pelo mapa de curvas de nível (figura 2), em que as altitudes são dadas em metros. A e B representam pontos em curvas de nível diferentes. A distância real entre eles é 400 m. Calcule a medida da inclinação α , em relação ao plano horizontal, do segmento que une os correspondentes dos pontos A e B na montanha ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$).

Q4. (ENEM - 2009) Ao morrer, o pai de João, Pedro e José deixou como herança um terreno retangular de 3 km por 2 km que contém uma área de extração de ouro delimitada por um quarto de círculo de raio 1 km aproximadamente a partir do canto inferior esquerdo da propriedade.

Dado o maior valor da área de extração de ouro, os irmãos concordaram em repartir a propriedade de modo que cada um ficasse com a terça parte da área de extração, conforme mostra a figura ao lado. De acordo com a partilha proposta pelos três irmãos, qual a porcentagem da área do terreno coube a cada um deles?







CAPÍTULO 6

CC6 - SEQUÊNCIAS: GENERALIDADES (COM ETAPAS REDUZIDAS)

Situação 6.1: “Adivinha” essa ... Qual o próximo número?

1ª Etapa: Apresentação da situação-problema

(DANTE, 2016a; IEZZI et al., 2016a; SMOLE; DINIZ, 2016a). Em 1202, o matemático italiano Leonardo de Pisa (c.1180-1250), mais conhecido como Fibonacci, publicou seu livro intitulado *Líber Abaci*, onde apresentou o seguinte problema (Sequência de Fibonacci) que o consagrou:

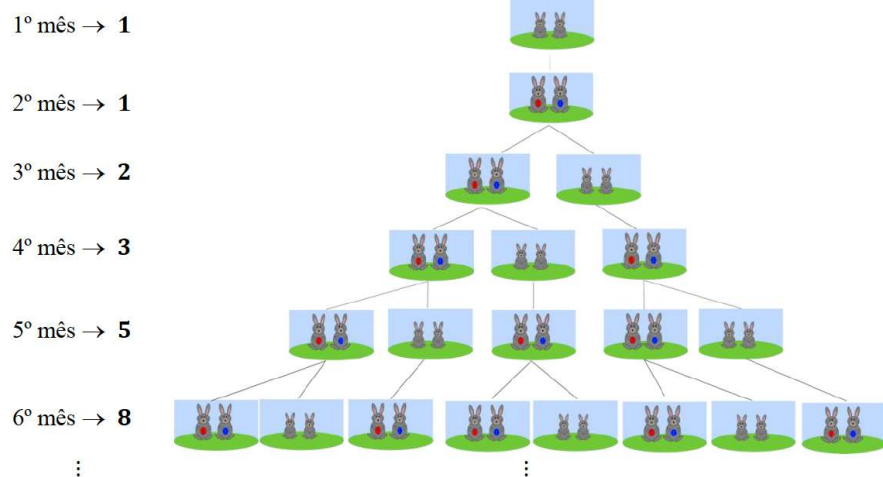
Quantos casais de coelhos serão gerados em um ano, sabendo que: No início, há apenas um casal que acabou de nascer; Os casais atingem a maturidade sexual (no final do segundo mês) e se reproduzem ao final do terceiro mês; Um mês é o período de gestação dos coelhos; Todos os meses, cada casal maduro dá à luz um novo casal; Os coelhos nunca morrem?



Retrato de Fibonacci

Observe como fica o desenvolvimento do problema nos 6 primeiros meses:

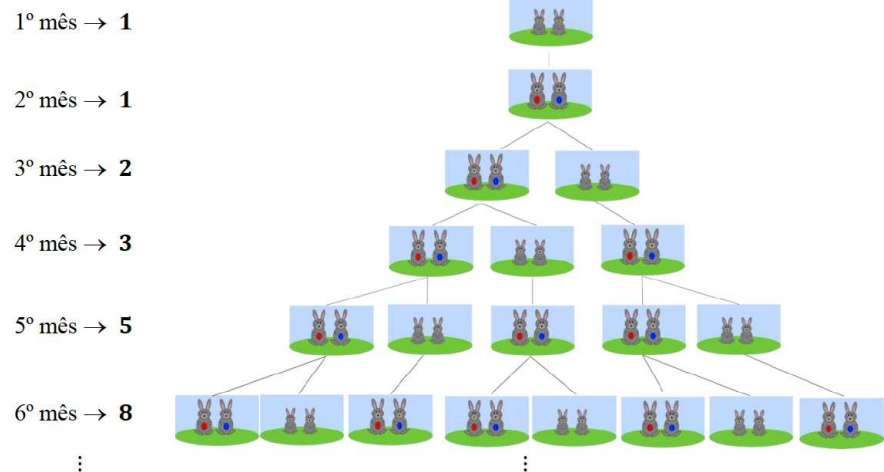
Modelo 20



Fonte: Adaptado de https://pt.wikipedia.org/wiki/Sequ%C3%Aancia_de_Fibonacci.

Observe como fica o desenvolvimento do problema nos 6 primeiros meses:

Modelo 20



Fonte: Adaptado de https://pt.wikipedia.org/wiki/Sequ%C3%Aancia_de_Fibonacci.

Identificando Variáveis a partir da Situação 6.1

- O modelo apresentado (Modelo 20) indica algumas grandezas. Quais são elas?
- Que variáveis você usaria para representar essas grandezas?

Observação: Para auxiliar na identificação das variáveis, o professor pode sugerir, em diálogo como os estudantes, que o número de casais de coelhos seja representado por x_k , sendo $k = 1, 2, 3, \dots$ o mês da contagem. Significa que: x_1 representa o número de casais de coelhos no primeiro mês; x_2 , o número de casais de coelhos no segundo mês; x_3 , o número de casais de coelhos no terceiro mês; e assim, sucessivamente.

2ª Etapa: Exploração e interpretação

Possíveis questões a partir da Situação 6.1

- Como determinar um elemento dessa sequência a partir dos anteriores?
- Como seria uma lei de formação ou expressão geral para essa sequência?
- Dividindo cada elemento dessa sequência, a partir do segundo, pelo anterior, que valores encontramos?
- Há alguma relação desses valores com o “número de ouro”? Explique. Etc.

3ª Etapa: Desenvolvimento do conteúdo curricular e Resolução

Sugestão de Discussões em torno da Situação 6.1

Fica a critério do professor!

Nesse momento, o professor tem autonomia para desenvolver, em diálogo com os estudantes, o **conteúdo curricular** que evidencie o modelo geral em estudo e dê conta dos questionamentos levantados. Além disso, outras situações que se utilizam do modelo geral apresentado, podem ser evidenciadas e discutidas no grupo.

Sugestão de outras Ações Exploratórias ...

Tarefa 2: Ações Exploratórias a partir da Situação 6.1

Fica a critério do professor!

4ª Etapa: Aplicação

Questões de Aplicação ficam a critério do professor!

Situação 6.2: Futebol mágico!

1ª Etapa: Apresentação da situação-problema

(IEZZI et al., 2016a, p. 177). O Brasil é o maior vencedor de Copas do Mundo até hoje, com cinco títulos: em 1950 - Suécia; 1962 - Chile; 1970 - México; 1994 - Estados Unidos; 2002 - Coreia do Sul/Japão.

Figura 14 - Brasil Campeão do Mundo



1958



1962



1970



1994



2002

Fonte: <https://br.pinterest.com/pin/42502790218587621/?lp=true>, <https://br.pinterest.com/pin/418764465324518988/>, <https://br.pinterest.com/pin/332070172519401580/>, <https://br.pinterest.com/pin/355643701817859082/>, http://www.espn.com.br/noticia/750914_aposentadoria-do-menino-prodigio-kaka-deixa- apenas-dois-campeoes-mundiais-de-2002-em-acao.

Com tudo isso, uma copa que certamente não vai sair da lembrança dos brasileiros, é a Copa de 2014, realizada no Brasil, quando perdemos para a Alemanha (semifinais) por 7 a 1. Triste lembrança! Mas, deixando a tristeza de lado, sabe-se, contudo que:

Modelo 21 A Copa do Mundo de Futebol é um evento que ocorre de quatro em quatro anos. A 1ª Copa foi realizada em 1930, no Uruguai. De lá para cá, apenas nos anos de 1942 e 1946 a Copa não foi realizada, devido à 2ª Guerra Mundial.

Identificando Variáveis a partir da Situação 6.2

- O modelo apresentado (Modelo 21) indica algumas grandezas. Quais são elas?
- Que variáveis você usaria para representar essas grandezas?

Observação: Para auxiliar na identificação das variáveis, o professor pode discutir, em diálogo com os estudantes, que o ano em que cada Copa é realizada (sem interrupção) pode ser representado por a_k , sendo $k = 1, 2, 3, \dots$ a ordem do evento. Significa que: a_1 indica o ano em que ocorreu a primeira copa; a_2 , o ano em que ocorreu a segunda copa; a_3 , o ano em que ocorreu a terceira copa; e assim, sucessivamente. Além disso, como a Copa do Mundo de Futebol ocorre somente de 4 em 4 anos, diz-se que a **razão** (diferença entre cada termo e o anterior, representada por r) da sequência desse evento é 4.

2ª Etapa: Exploração e interpretação

Possíveis questões a partir da Situação 6.2

- Quais Copas do Mundo, em termos de ordem sequencial do evento, teriam sido realizadas em 1930 e 1942?
- Em qual ordem do evento o Brasil foi campeão?
- Considerando que as próximas Copas ocorram seguindo o mesmo padrão e que não existam imprevistos que impeçam sua realização, quando será a trigésima Copa? E a quadragésima?
- Haverá Copa em 2100? E em 2150?
- Como pode ser caracterizada esse tipo de sequência? Etc.

3ª Etapa: Desenvolvimento do conteúdo curricular e Resolução

Sugestão de Discussões em torno da Situação 6.2

Fica a critério do professor!

Nesse momento, o professor tem autonomia para desenvolver, em diálogo com os estudantes, o **conteúdo curricular** que evidencie o modelo geral em estudo e dê conta dos questionamentos levantados. Além disso, outras situações que se utilizam do modelo geral apresentado, podem ser evidenciadas e discutidas no grupo.

Sugestão de outras ações exploratórias

Tarefa 2: Ações Exploratórias a partir da **Situação 6.2**

Fica a critério do professor!

4ª Etapa: Aplicação

Questões de Aplicação ficam a critério do professor!

Situação 6.3: Voltando a falar de bactéria!

1ª Etapa: Apresentação da situação-problema

(DANTE, 2016a, p. 148, adaptada). Como visto anteriormente, a *E. coli* (*Escherichia coli*) é uma bactéria que habita naturalmente no intestino de humanos e de alguns animais, mas que em grandes quantidades pode causar infecções intestinais e urinárias. Por isso, é preciso ter bastante cuidado para não consumir água ou alimentos contaminados. Foi visto também que, em condições ideais:

Modelo 22 A quantidade de bactérias *E. coli* dobra a cada período de 20 minutos, aproximadamente.

Identificando Variáveis a partir da Situação 6.3

- O modelo apresentado (Modelo 21) indica algumas grandezas. Quais são elas?
- Que variáveis você usaria para representar essas grandezas?

Observação: Para auxiliar na identificação das variáveis, o professor pode discutir, em diálogo com os estudantes, que o número de bactérias *E. Coli*, contado a cada 20 minutos, pode ser representado por y_k , sendo $k = 1, 2, 3, \dots$ a ordem das contagens. Significa que: y_1 é o número de bactérias na primeira contagem, isto é, a quantidade inicial dessa cultura; y_2 , o número de bactérias na segunda contagem; y_3 , o número de bactérias na terceira contagem; e assim, sucessivamente. Além disso, como o número dessas bactérias dobra a cada período de tempo, diz-se que a **razão** (quociente da divisão entre cada termo e o anterior, representada por q) da sequência desse fenômeno é 2.

2ª Etapa: Exploração e interpretação

Possíveis questões a partir da Situação 6.3

- Considerando que, a cada período de 20 minutos, o número dessas bactérias é observado e contado, formando uma sequência ordenada de números, como seria uma lei de formação ou expressão geral que prevê os termos dessa sequência, isto é, o número de bactérias em cada observação?
- Etc.

3ª Etapa: Desenvolvimento do conteúdo curricular e Resolução

Sugestão de Discussões em torno da Situação 6.3

Fica a critério do professor!

Nesse momento, o professor tem autonomia para desenvolver, em diálogo com os estudantes, o **conteúdo curricular** que evidencie o modelo geral em estudo e dê conta dos questionamentos levantados. Além disso, outras situações que se utilizam do modelo geral apresentado, podem ser evidenciadas e discutidas no grupo.

Sugestão de outras Ações Exploratórias ...

Tarefa 2: Ações Exploratórias a partir da **Situação 6.3**

Fica a critério do professor!

4ª Etapa: Aplicação

Questões de Aplicação fica a critério do professor!

REFERÊNCIAS

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**: uma nova estratégia. São Paulo: Contexto, 2002.

[C1] DANTE, L. R. **Matemática**: contexto & aplicações (Ensino Médio). 3. ed. - São Paulo: Ática, 2016. Vol. 1, 2, 3.

[C2] IEZZI, G.; DOLCE, O.; DEGENSZAJN, D.; PÉRIGO, R.; ALMEIDA, N. **Matemática**: ciência e aplicações (Ensino Médio). 9. ed. - São Paulo: Saraiva, 2016. Vol. 1, 2, 3.

[C3] SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I. **Matemática para compreender o mundo** (Ensino Médio). 1. ed. - São Paulo: Saraiva, 2016. Vol. 1, 2, 3.

[C4] SOUZA, J. R.; GARCIA, J. S. R. **# Contato Matemática** (Ensino Médio). 1. ed. - São Paulo: FTD, 2016. Vol. 1, 2, 3.

[C5] PAIVA, M. **Matemática Paiva** (Ensino Médio). 3. ed. - São Paulo: Moderna, 2016. Vol. 1, 2, 3.

[C6] LEONARDO, F. M. (Org.). **Conexões com a Matemática** (Ensino Médio). 3. ed. - São Paulo: Moderna, 2016. Vol. 1, 2, 3.

ENEM - Exame Nacional do Ensino Médio (2009-2018). **INEP - Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira**. Ministério da Educação.

SOARES, D. S. Model Analysis with Digital Technologies: a “hybrid approach”. In: STILLMAN, G. A.; BLUM, W.; BIEMBENGUT, M. S. (Eds.) **Mathematical Modeling in Education Research and Practice**: cultural, social and cognitive influences. Cham: Springer, 2015. p. 453-463.

SOARES, D. S. **Uma abordagem pedagógica baseada na Análise de Modelos para alunos de Biologia: qual o papel do software?** 2012. 341f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2012.

SOARES, D. S.; JAVARONI, S. L. Análise de Modelos: possibilidades de trabalho com Modelos Matemáticos em sala de aula. In: BORBA, M. C. & CHIARA, A. (Org.) **Tecnologias Digitais e Educação Matemática**, São Paulo-SP, Editora Livraria da Física, 2013, p. 195-219.

SOUZA, E, S. **Análise de Modelos**: um método de ensino de Matemática na Educação Básica. (Tese de doutorado em Educação em Ciências e Matemática). Porto Alegre: PUCRS, 2019.

SOBRE OS AUTORES

Emerson Silva de Sousa

Doutor em Educação em Ciências e Matemática pela Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul - PUCRS (2019), Mestre em Matemática pela Universidade Federal do Amazonas - UFAM (2009) e Licenciado em Matemática pela Universidade Federal do Pará - UFPA (1997). Tem Especialização em Informática Educativa pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul - UFRGS (2003). É Professor adjunto (DE) da Universidade Federal do Oeste do Pará - UFOPA desde 2012 e tem interesse na área das Aplicações matemáticas e da Matemática, com ênfase em Análise de Modelos e Modelagem Matemática (contexto educacional). É membro do GEPEMM (Grupo de Estudos e Pesquisas Educacionais em Modelagem Matemática/UFOPA).

Francisco Robson Alves da Silva

Doutorando em Educação na Universidade Federal do Oeste do Pará, Mestre em Computação Aplicada pela Universidade Federal do Pará - UFPA (2009) e Licenciado em Matemática pela UFPA (1997). É Especialista em Educação Matemática pela Universidade do Estado do Pará - UEPA (2001), Especialista em Estatísticas Educacionais pela UFPA (2007) e Especialista em Docência para Educação Profissional, Científica e Tecnológica pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Pará - IFPA (2018). Trabalha como docente do IFPA – Campus Óbidos desde 2016. É membro do GEPEMM (Grupo de Estudos e Pesquisas Educacionais em Modelagem Matemática/UFOPA). Atualmente ministra aulas nos cursos profissionalizantes do IFPA, além de desenvolver pesquisas voltadas à Modelagem Matemática, Análise de Modelos e Tecnologias Educacionais.

ÍNDICE REMISSIVO

A

Água 7, 17, 25, 28, 50, 68, 94

Altura 34, 74, 78

Análise 9, 68

Aplicação 11, 16, 19, 22, 24, 27, 30, 36,
39, 42, 46, 52, 54, 58, 64, 67, 77, 80,
93, 95

Autonomia 15, 19, 21, 24, 26, 30, 35, 38,
42, 45, 51, 54, 57, 63, 95

C

Científica 74

Conteúdo 4, 9, 10, 11, 15, 19, 21, 24, 26,
30, 35, 38, 42, 45, 51, 54, 57, 63, 95

Curricular 9, 10, 11, 15, 19, 21, 24, 26,
30, 35, 38, 42, 45, 51, 54, 57, 63, 95

D

Desenvolvimento 10, 11

Diálogo 11, 15, 19, 21, 24, 26, 30, 35, 38,
42, 45, 51, 54, 57, 63, 95

Discussões 11

E

Estratégias 9

Estudantes 9, 10, 11, 15, 19, 21, 24, 26,
30, 35, 38, 41, 42, 44, 45, 51, 54, 57,
63, 74, 78, 95

Estudo 11, 15, 19, 21, 24, 26, 30, 35, 38,
42, 45, 51, 54, 57, 63, 74, 95

Etapa 11

Exploração 11, 12

Exploratórias 11, 15, 16, 18, 19, 21, 23,
24, 26, 29, 30, 35, 39, 42, 45, 52, 54,
57, 63, 64, 95

Expressão 41, 44

F

Função 20, 34, 67

G

Geral 9, 11, 15, 17, 19, 20, 21, 24, 26, 30,
35, 38, 42, 45, 51, 53, 54, 57, 63, 95

Gráfico 17, 28

I

Interpretação 11, 43

M

Matemática 9, 41, 44, 56, 96

Modelo 11, 15, 19, 21, 24, 26, 30, 35, 38,
42, 45, 51, 54, 57, 63, 95

Momento 15, 19, 21, 24, 26, 28, 30, 34,
35, 38, 42, 45, 51, 54, 57, 63, 78, 95

N

Nível 10, 17, 25, 28, 68

Número 7, 20, 55, 88

P

Professor 9, 10, 11, 12, 15, 19, 21, 24, 26,
30, 35, 38, 41, 42, 44, 45, 51, 54, 57,
63, 74, 78, 93, 95

Q

Quantidade 25, 28, 43, 55, 67, 68

R

S

Situação 7, 14, 17, 20, 23, 25, 28, 34, 37,
40, 43, 50, 53, 55, 62, 65, 67, 74, 78,
81, 88, 91, 94

Situações 9, 10, 11, 12, 15, 19, 21, 24, 26,
28, 30, 35, 38, 42, 45, 50, 51, 53, 54,
55, 57, 63, 95

Sugestão 11, 15, 16, 18, 19, 21, 23, 24, 26,
29, 30, 35, 39, 42, 45, 52, 54, 57, 63,
64, 95

T

Tarefa 11, 41, 44



ANÁLISE DE MODELOS

Atividades de Matemática para Sala de Aula

Ensino Médio

Volume 1

RFB Editora
Home Page: www.rfbeditora.com
Email: adm@rfbeditora.com
WhatsApp: 91 98885-7730
CNPJ: 39.242.488/0001-07
R. dos Mundurucus, 3100, 66040-033, Belém-PA



Emerson Silva de Sousa
Francisco Robson Alves da Silva